ARCHIMÈDE

DES SPIRALES
DE L'ÉQUILIBRE DES FIGURES PLANES
L'ARÉNAIRE
LA QUADRATURE DE LA PARABOLE



COLLECTION DES UNIVERSITÉS DE FRANCE
Publiée sous le patronage de l'ASSOCIATION GUILLAUME BUDÉ

ARCHIMÈDE

TOME II

DES SPIRALES
DE L'ÉQUILIBRE DES FIGURES PLANES
L'ARÉNAIRE
LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

TEXTE ÉTABLI ET TRADUIT

PAR

CHARLES MUGLER

Professeur honoraire à l'Université de Nice



PARIS
SOCIÉTÉ D'ÉDITION « *LES BELLES LETTRES* »
95, BOULEVARD RASPAIL

1971

Conformément aux statuts de l'Association Guillaume Budé, ce volume a été soumis à l'approbation de la commission technique, qui a chargé M. Ed. Delebecque d'en faire la révision et d'en surveiller la correction en collaboration avec M. Ch. Mugler.

AVANT-PROPOS

Pour l'établissement du texte et la révision de ce tome second mes collègues J. Irigoin et E. Delebecque m'ont de nouveau prêté leur concours fidèle. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Je tiens aussi à assurer de ma gratitude M. E. Stamatis, dont les savants travaux sur Archimède m'ont été d'un grand secours pour ce tome II comme pour le précédent.

Ch. M.

SIGLA

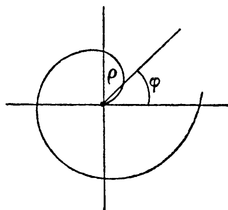
A	codex Vallae deperditus a quo fluxerunt DEGH.
B	Ottobonianus lat. 1850, autographus G. de Moerbeke, a. 1269.
C	Codex rescriptus Metochii Constantinopolitani S. Sepulchri monasterii Hierosolymitani 355, saec. X.
D	Laurentianus XXVIII 4, saec. XV.
E	Marcianus gr. 305, saec. XV.
G	Parisinus gr. 2360, saec. XVI.
H	Parisinus gr. 2361, a. 1544.
P	Parisinus gr. 2448, saec. XIV.
G	Guelferbytanus Gudianus gr. 77.

Basil.	Editio princeps, Basileae, 1544.
Riualtus	Archimedis opera, Parisiis, 1615.
Barrowius	Opera Archimedis, Londini, 1675.
Wallis	Archimedis arenarius et dimensio circuli, Oxonii, 1678.
Torellius	Archimedis opera, Oxonii, 1792.
Nizzius	Nizze, Archimedes' vorhandene Werke, übersetzt und erklärt, Stralsund, 1824.
Heiberg	Archimedis opera omnia, editio altera, Lipsiae, 1910-1915.

DES SPIRALES

NOTICE

Dans ce traité Archimède résout un certain nombre de problèmes relatifs à une courbe de son invention, la « spirale d'Archimède », qu'il définit d'une manière cinématique comme décrite par un point qui se déplace avec une vitesse constante sur une droite pendant que cette droite tourne avec une vitesse angulaire constante autour d'un de ses points. Archimède démontre d'abord



une suite de onze théorèmes auxiliaires relatifs au déplacement uniforme d'un point sur une droite, à la longueur des segments interceptés par des cercles et leurs tangentes sur des sécantes données et à la somme de certaines progressions formées par les carrés de segments de droites se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur. Ces propositions, 1-11, interviennent dans l'analyse des propriétés de la spirale à laquelle sont consacrées les propositions 12-28. Une série de définitions nous fait connaître la génération de la spirale et fixe la terminologie relative au point initial, appelé « origine » de la spirale, à la position initiale de la droite qui tourne, aux segments successifs parcourus sur la

droite tournante par le point mobile pendant les révolutions successives, aux aires limitées par les spires successives et les segments correspondants, et aux cercles concentriques décrits autour de l'origine de la spirale avec des rayons successivement égaux au premier segment parcouru par le point mobile et aux multiples entiers de ce segment. Les propositions 12-17 démontrent que les rayons vecteurs comprenant entre eux des angles égaux se dépassent l'un l'autre de longueurs égales ; qu'une tangente à la spirale ne la touche qu'en un seul point ; que deux rayons vecteurs de la première spire ont entre eux le même rapport que les arcs du premier cercle compris entre la droite initiale et les points d'intersection de ce cercle avec ces rayons vecteurs ; qu'une relation analogue lie des rayons vecteurs de la seconde spire aux arcs qu'ils déterminent sur le second cercle ; que les angles que fait la tangente à une spirale avec le rayon vecteur du point de contact sont inégaux, l'angle « en avant », c'est-à-dire l'angle situé dans la région encore à balayer par le rayon vecteur, étant obtus, l'angle « en arrière », c'est-à-dire situé dans la région déjà balayée, étant aigu. Dans les propositions 18-20, Archimède se sert des propriétés de la spirale pour la rectification d'arcs de cercle.

La fin du traité, les propositions 21-28, est consacrée à une des réussites les plus extraordinaires de son génie, à la quadrature de la spirale. Ces pages font apparaître d'une façon particulièrement nette à la fois les difficultés que rencontrait au IIIe siècle avant J.-C. l'évaluation d'une aire limitée par des lignes autres que la droite et la circonférence, et les ressources d'imagination par lesquelles Archimède triompha de ces difficultés. Transposée en algorithme moderne, la quadrature de la spirale ne pose, en effet, aucun problème. L'équation, en coordonnées polaires, d'une spirale, ayant comme point initial l'origine des coordonnées et comme position initiale de la droite qui tourne l'axe des abscisses, étant

$$(1)\ \rho = \frac{a}{2\pi}\varphi$$

où a désigne la longueur du segment parcouru par le point mobile sur la droite pendant une révolution, l'aire de la première spire est égale à l'intégrale définie

$$(2)\ A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi$$

D'où

$$(3)\ A = \frac{a^2}{8\pi^2}\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{3}.$$

Mais cette opération, qui nous apprend en un clin d'œil que l'aire A de la première spire de la spirale d'Archimède est équivalente au tiers du premier cercle, nous fait oublier les raisonnements géométriques qui sont à la base de l'application du calcul intégral à l'évaluation des aires. La sommation des aires dans ce procédé porte, une fois pour toutes, sur des surfaces différentielles cernées par des figures formées de lignes droites, quelle que soit la ligne courbe limitant l'aire à évaluer. Le géomètre moderne ayant à résoudre un problème de « quadrature » de ce genre ne s'occupe plus de la décomposition de l'aire à mesurer en tranches différentielles ni de l'inscription et de la circonscription de ces tranches. Il s'en remet au fonctionnement de l'algorithme institué par les inventeurs du calcul différentiel et intégral, qui s'applique indifféremment à un grand nombre de courbes dont on connaît l'équation. Il n'en est pas de même chez les anciens. Chacun de leurs problèmes d'intégration était un cas d'espèce dont la solution exigeait des méthodes particulières qui ne prêtaient pas à une généralisation. Dans l'aire du segment de parabole dont l'évaluation est une vraie quadrature, Archimède fait intervenir, comme

nous le verrons, des suites décroissantes de figures rectilignes, de triangles dans l'occurrence. Pour l'aire de la spirale, en revanche, dont l'évaluation n'est qu'une quadrature conditionnée aboutissant entre autres à l'équivalence entre la première spire et le tiers du premier cercle, il a recours à des secteurs circulaires inscrits et circonscrits aux secteurs de la spirale et tels que leurs rayons forment des progressions arithmétiques (cf. les propositions 21, 24, 27 du texte). Si Archimède a choisi ce moyen, c'est sans doute parce que par intuition il avait prévu l'existence d'un rapport simple entre les aires de la spirale et du cercle.

Le texte du traité *Des Spirales* est établi d'après les manuscrits B, D, E, G, H et les parties conservées de C.

DES SPIRALES

Archimède à Dosithée, joie !

De la plupart des théorèmes, dont j'avais envoyé les énoncés à Conon et dont tu m'engages toujours à rédiger les démonstrations, tu possèdes les démonstrations écrites dans les livres qu'Héraclide t'a remis ; mais j'ai développé certaines de ces démonstrations aussi dans le présent livre, et je te les envoie. Ne t'étonne pas que j'aie beaucoup tardé à publier les démonstrations de ces propositions ; la cause en est que j'ai voulu les soumettre d'abord à des hommes qui, pratiquant les mathématiques, préfèrent se consacrer eux-mêmes à leur recherche. En effet, combien n'y a-t-il pas de théorèmes de géométrie qui apparaissaient d'un accès difficile au début, et qui ont trouvé leur achèvement avec le temps ? Conon est décédé avant d'avoir eu le temps nécessaire pour l'étude de ces questions : sinon il en aurait rendu évidentes les solutions par la découverte de toutes ces propriétés et de beaucoup d'autres et il aurait fait progresser la géométrie ; car nous savons qu'il avait une intelligence peu commune des mathématiques et qu'il déployait une activité hors ligne. Mais, bien que de nombreuses années se soient écoulées depuis la mort de Conon, je constate qu'aucun géomètre ne s'est attaqué à un de ces problèmes. Aussi veux-je les proposer ici chacun à part ; car il se trouve que deux de ces problèmes, que moi-même je n'étais pas encore arrivé à mener à bonne fin, ont été ajoutés à leur liste ; de cette façon ceux qui prétendent les trouver tous, sans en produire aucune

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Τῶν ποτὶ Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων, ὑπὲρ ὧν ἀεὶ τὰς ἀποδείξιας ἐπιστέλλεις μοι γράψαι, τῶν μὲν πλείστων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθέντεσσιν ἔχεις γεγραμμένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἐπιστέλλω τοι. Μὴ θαυμάσῃς δὲ εἰ πλείονα χρόνον ποιήσαντες ἐκδίδομες τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν· συμβαίνει γὰρ τοῦτο γεγενῆσθαι διὰ τὸ βούλεσθαί με πρότερον διδόμεν τοῖς περὶ τὰ μαθήματα πραγματευομένοις καὶ μαστεύειν αὐτὰ προαιρουμένοις. Πόσα γὰρ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα χρόνῳ τὰν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι; Κόνων μὲν οὖν οὐχ ἱκανὸν λαβὼν ἐς τὰν μάστευσιν αὐτῶν χρόνον μετάλλαξεν τὸν βίον· ἢ δῆλα ἐποίησέν κα ταῦτα πάντα εὑρὼν καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευρὼν καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγεν γεωμετρίαν· ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν αὐτῷ σύνεσιν οὐ τὰν τυχοῦσαν περὶ τὸ μάθημα καὶ φιλοπονίαν ὑπερβάλλουσαν. Μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἐπιγεγενημένων οὐδ' ὑφ' ἑνὸς οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανόμεθα κεκινημένον. Βούλομαι δὲ καθ' ἓν ἕκαστον αὐτῶν προενέγκασθαι· καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐμαυτῷ μήπω πεπερασμένων διὰ

10 πόσα Barrowius : ποῖα codd. || 13 οὖν add. Heiberg || 14 ἢ δῆλα Heiberg praeeunte Maduigio : ἄδηλα DEGH et obscura B || κα Heiberg : καὶ codd. || 22 ἐμαυτῷ Heiberg : ἐν αὐτῷ DEGH inter ipsa B || μήπω πεπερασμένων διὰ Heiberg : μὴ κεχωρασμένα DEH non separata B μὴ κεχωρισμένα G.

démonstration, seront confondus de se faire fort de trouver des solutions impossibles. Je crois donc à propos de t'expliquer la nature de ces problèmes en distinguant entre ceux dont je t'ai déjà mandé par écrit les démonstrations et ceux dont je donne la démonstration dans le présent livre.

Voici quel était le premier problème : étant donnée une sphère, trouver une aire plane équivalente à la surface de la sphère[1]. La solution de ce problème apparut pour la première fois lors de l'édition du livre sur la sphère ; une fois démontré, en effet, que l'aire de toute sphère est quadruple de l'aire d'un grand cercle[2] de cette sphère, il devient évident qu'il est possible de trouver une aire plane équivalente à la surface de la sphère.

Deuxième problème : étant donné un cône ou un cylindre, trouver une sphère équivalente à ce cône ou à ce cylindre[3].

Troisième problème : couper une sphère donnée par un plan de manière que les volumes de ses segments aient entre eux un rapport donné[4].

Quatrième problème : couper une sphère donnée par un plan de manière que les aires de ses segments aient entre elles un rapport donné[5].

Cinquième problème : rendre un segment de sphère donné (sc. par le volume) semblable à un segment de sphère donné (sc. par les proportions)[6].

Sixième problème : étant donnés deux segments, soit d'une même sphère ou de sphères différentes, trouver un segment de sphère semblable à l'un des segments et ayant une aire équivalente à l'aire de l'autre segment[7].

Septième problème : découper d'une sphère donnée un segment par un plan de manière qu'il ait au cône de même base et de même hauteur un rapport donné supérieur à celui de trois à deux[8].

1. Cf. *De le sphère et du cylindre*, II, fin de la lettre à Dosithée.
2. Cf. *ibid.*, I, 33.
3-8. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

τέλους ποτιτεθῆμεν, ὅπως οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὑρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδεμίαν ἐκφέροντες ἐλέγχωνται ποθωμολογηκότες εὑρίσκειν τὰ ἀδύνατα. Ταῦτα δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐντί, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξιας ἔχεις ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζομες, δοκιμάζομες ἐμφανίξαι τοι. Πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν· σφαίρας δοθείσας ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. Ὃ δὴ καὶ πρῶτον ἐγένετο φανερὸν ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τὰν σφαῖραν βιβλίου· δειχθέντος γὰρ ὅτι πάσας σφαίρας ἁ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ δῆλον ὡς δυνατόν ἐστι χωρίον ἐπίπεδον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. Δεύτερον δέ· κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν ἴσαν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. Τρίτον δέ· τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. Τέταρτον δέ· τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμάματα τᾶς ἐπιφανείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. Πέμπτον δέ· τὸ δοθὲν τμᾶμα σφαίρας τῷ δοθέντι τμάματι σφαίρας ὁμοιῶσαι. Ἕκτον δέ· δύο δοθέντων τμαμάτων σφαίρας εἴτε τᾶς αὐτᾶς εἴτε ἄλλας εὑρεῖν τι τμᾶμα σφαίρας, ὃ ἐσσεῖται αὐτὸ μὲν ὁμοῖον τῷ ἑτέρῳ τῶν τμαμάτων, τὰν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἕξει τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου τμάματος. Ἕβδομον· ἀπὸ τᾶς δοθείσας σφαίρας τμᾶμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μείζονα τοῦ ὃν ἔχει τὰ τρία ποτὶ τὰ δύο. Τούτων μὲν οὖν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς

1 ποτιτεθῆμεν Heiberg : δὲ ποτέσσομεν DEGH finem autem attingemus B || 3 ποθωμολογηκότες Heiberg : ἀποθωμολογηκότες DEGH tamquam confitentes B || 5 κομίζομες Torellius : κομίζοντες codd. || 6 δοκιμάζομες Heiberg : δοκιμάζοντες codd || 9 τὰν σφαῖραν Heiberg : τὴν σφαῖραν BDEH τῆς σφαίρας G || 27 μείζονα Nizzius : μὴ μείζονα codd.

De tous ces problèmes cités Héraclide t'a remis les démonstrations ; quant à ceux qui étaient placés séparément à leur suite, ils sont faux. Les voici : si une sphère est coupée par un plan en deux parties inégales, le rapport du plus grand segment au plus petit est égal au carré du rapport de la plus grande aire à la plus petite. Que cette proposition est fausse, cela est évident en vertu des théorèmes qui t'ont été envoyés antérieurement, parmi lesquels figure en particulier le suivant : si une sphère est coupée en deux parties inégales par un plan perpendiculaire à un diamètre de la sphère, le plus grand segment de l'aire aura au plus petit segment le même rapport qu'a le plus grand segment du diamètre au plus petit, et le volume du plus grand segment de la sphère aura au volume du plus petit un rapport inférieur au carré du rapport entre la plus grande aire et la plus petite, mais supérieur à ce rapport multiplié une fois et demie par lui-même[1]. Tout aussi faux était le problème particulier rangé dernier, à savoir : si un diamètre d'une sphère est divisé de manière que le carré sur le plus grand de ses segments soit égal au triple du carré sur le plus petit segment, et si un plan mené par le point (sc. de division) perpendiculairement au diamètre coupe la sphère, la figure constituée par le plus grand segment de la sphère est de tous les segments ayant la même aire celui qui a le plus grand volume. L'inexactitude de cette proposition devient évidente à la lumière des théorèmes que je t'avais envoyés précédemment, où il a été démontré en effet que c'est l'hémisphère qui, de tous les segments de sphère de même surface, a le plus grand volume[2].

Après ces problèmes, les problèmes relatifs au cône que voici : si une parabole tourne pendant que son diamètre reste fixe, de telle manière que ce diamètre devient axe, la figure décrite par la parabole s'appellera

1. Cf. *ibid.*, II, 8.
2. Cf. *ibid.*, II, 9.

ἀποδείξιας Ἡρακλείδας ἐκόμιξεν· τὸ δὲ μετὰ ταῦτα κεχωρισμένον ψεῦδος ἦν. Ἔστι δέ· εἴ κα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλασίονα λόγον ἕξει ἢ ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. Ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, διὰ τῶν προαπεσταλμένων φανερόν ἐστι· κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε· εἴ κα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, τᾶς μὲν ἐπιφανείας τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ τμᾶμα τὸ μεῖζον τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον, τὸ δὲ μεῖζον τμᾶμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. Ἦν δὲ καὶ τὸ ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι, εἴ κα σφαίρας τινὸς ἁ διάμετρος τμαθῇ, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμάματος τετράγωνον τριπλάσιον εἶμεν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, καὶ διὰ τοῦ σαμείου ἐπίπεδον ἀχθὲν ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τέμνῃ τὰν σφαῖραν, τὸ τοιοῦτον τῷ εἴδει σχῆμα, οἷόν ἐστι τὸ μεῖζον τᾶς σφαίρας τμᾶμα, μέγιστόν ἐστι τῶν ἄλλων τμαμάτων τῶν ἐχόντων ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν. Ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι δῆλον διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων· δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ ἡμισφαίριον μέγιστόν ἐστι τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφανείας σφαίρας τμαμάτων. Μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προβεβλημένα ἐστὶ τάδε· εἴ κα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθῇ ὥστε εἶμεν ἄξονα τὰν διάμετρον, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κωνοειδὲς καλείσθω, καὶ εἴ κα τοῦ κωνοειδέος

8 τᾶς μὲν ἐπιφανείας add. Heiberg || 10 δὲ Heiberg : γὰρ codd. || 11 ἔλασσον B : om. DEGH || 18 ἐπίπεδον Heiberg : τὸ ἐπίπεδον DEGH.

conoïde ; si un plan est tangent à la figure conoïde, et qu'un autre plan, mené parallèlement au plan tangent, découpe un segment du conoïde, on appellera base du segment découpé le plan sécant et sommet le point de contact de l'autre plan (sc. du plan tangent) avec le segment[1]. Dès lors, si la figure en question est coupée par un plan perpendiculaire à l'axe, il est évident que l'intersection sera un cercle ; ce qui exige une démonstration, c'est cette autre propriété que le volume du segment découpé sera égal aux trois demis du volume du cône ayant même base et même hauteur[2]. Et si on découpe du conoïde deux segments par des plans menés de n'importe quelle manière, il est évident que les intersections seront des ellipses sauf quand les plans sécants sont perpendiculaires à l'axe[3] ; ce qu'il faut démontrer, en revanche, c'est que le rapport entre les deux segments est égal au rapport entre les carrés des segments de droite menés, parallèlement à l'axe, de leurs sommets aux plans sécants[4] ; de ces dernières propositions les démonstrations ne te sont pas encore envoyées.

A la suite de ces questions, des problèmes relatifs à la spirale qui, constituant comme un autre genre de problèmes, n'ont rien de commun avec ceux que nous venons de rappeler et dont je t'envoie les démonstrations, rédigées dans ce livre. Les voici : lorsqu'une droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira dans le plan une spirale. Je dis, dès lors, que l'aire comprise entre la spirale et la droite revenue à sa position initiale est égale au tiers du

1. Cf. *Sur les conoïdes et les sphéroïdes,* Lettre à Dosithée, commencement.

2. Cf. *Sur les con. et les sphér.,* 21 et Lettre à Dosithée, Archim. I, p. 103.

3. Cf. *ibid.,* 12.

4. Cf. *ibid.,* 24 et Lettre à Dosithée, Archim. I, p. 103.

σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. Εἰ δή κα τὸ εἰρημένον σχῆμα ἐπιπέδῳ τμαθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται δῆλον, ὅτι δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, δεῖξαι δεῖ. Καὶ εἴ κα τοῦ κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ δῆλον, εἴ κα τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἔωντι ποτὶ τὸν ἄξονα, ὅτι δὲ τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα τοῦτον ἑξοῦντι τὸν λόγον, ὃν ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἀλλάλας αἱ ἀπὸ τᾶν κορυφᾶν αὐτῶν ἀγμέναι παρὰ τὸν ἄξονα μέχρι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ· τούτων δ' αἱ ἀποδείξιες οὔπω τοι ἀποστέλλονται. Μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τᾶς ἕλικος ἦν προβεβλημένα ταῦτα· ἐντὶ δ' ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνέοντα τοῖς προειρημένοις· ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξιας γεγραφήκαμές τοι. Ἔστιν δὲ τάδε· εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Φαμὶ δὴ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἀποκατασταθείσας ὅθεν ὥρμασεν τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου

6 κα Heiberg : καὶ BDEGH ‖ 12 ὀξυγωνίων κώνων BDEG : ὀξυγωνίου κώνου H Nizzius ‖ 15 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH ‖ 16 ἐπὶ add. Heiberg ‖ τὰ alt. add. Heiberg ‖ 17 οὔπω B : οὕτω DEGH ‖ 18 ἕλικος G : ἕλικας BDEH.

cercle décrit autour du point fixe comme centre avec un rayon égal au segment de droite parcouru par le point pendant une révolution de la droite[1]. Et si une droite est tangente à la spirale en son extrémité atteinte en dernier lieu, et qu'on élève, sur la droite ayant tourné et repris sa position initiale, la perpendiculaire à l'extrémité restée fixe jusqu'à sa rencontre avec la tangente, je dis que le segment de droite ainsi mené est égal à la circonférence du cercle[2]. Et si la droite qui tourne avec le point qui se déplace sur elle fait plusieurs tours et revient à sa position initiale, je dis que l'aire ajoutée par la spirale dans sa troisième révolution est double de celle qui a été ajoutée dans la deuxième révolution, que l'aire ajoutée dans la quatrième révolution est triple, celle ajoutée dans la cinquième quadruple, et que, ainsi de suite, les aires ajoutées dans les révolutions ultérieures seront des multiples, dans l'ordre des nombres, de l'aire ajoutée dans la seconde révolution, alors que l'aire enveloppée dans la première révolution est la sixième partie de l'aire ajoutée dans la deuxième révolution. Si, enfin, on prend sur la spirale décrite pendant une révolution deux points qu'on joint par des droites à l'extrémité fixe de la droite qui tourne, si autour de ce point fixe comme centre et avec des rayons égaux aux segments

1. Cf. *Des spirales*, 24.
2. Cf. prop. 18.

τοῦ γραφέντος κέντρῳ μὲν τῷ μένοντι σαμείῳ, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ τᾷ διανυσθείσᾳ ὑπὸ τοῦ σαμείου ἐν τᾷ μιᾷ περιφορᾷ τᾶς εὐθείας. Καὶ εἴ κα τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος τὸ ἔσχατον γενόμενον, ἄλλα δέ τις εὐθεῖα τᾷ περιαχθείσᾳ καὶ ἀποκατασταθείσᾳ γραμμᾷ ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος αὐτᾶς ὥστε ἐμπεσεῖν τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, φαμὶ τὰν ποταχθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσαν εἶμεν τᾷ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. Καὶ εἴ κα ἁ περιαγομένα γραμμὰ καὶ τὸ σαμεῖον τὸ φερόμενον κατ' αὐτᾶς πλείονας περιφορὰς περιενεχθέωντι καὶ ἀποκατασταθέωντι πάλιν ὅθεν ὥρμασαν, φαμὶ τοῦ χωρίου τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος ὑπὸ τᾶς ἕλικος τὸ μὲν ἐν τᾷ τρίτᾳ ποτιλαφθὲν διπλάσιον ἐσσεῖσθαι, τὸ δὲ ἐν τᾷ τετάρτᾳ τριπλάσιον, τὸ δὲ ἐν τᾷ πέμπτᾳ τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον περιφοραῖς ποτιλαμβανόμενα χωρία κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσια ἐσσεῖσθαι τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος, τὸ δὲ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ περιλαφθὲν χωρίον ἕκτον μέρος εἶμεν τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος χωρίου. Καὶ εἴ κα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σαμεῖα λαφθέωντι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς περιενεχθείσας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γραφέωντι κέντρῳ μὲν τῷ μεμενακότι σαμείῳ, διαστημάτεσσι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς εὐθείας, καὶ ἁ ἐλάσσων τᾶν ἐπιζευχθεισᾶν ἐπεκβληθῇ, φαμὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ μείζονος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν ἐούσας καὶ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς

6-7 πέρατος αὐτᾶς Torellius : περὶ τὸ αὐτὸ codd. || 18 περιλαφθὲν Heiberg : ποτιλαφθὲν DEGH || 19 τοῦ G : τᾷ DEH || 20 ἕλικος G : ἕλικας DEH || 24 γραφέωντι Heiberg : γεγραφέωντι codd. || 28 τᾷ add. Heiberg.

de droite joignant le point fixe (sc. aux deux points pris sur la spirale) on décrit deux cercles et qu'on prolonge le plus petit des segments de jonction, je dis que le rapport de l'aire comprise entre l'arc du plus grand cercle situé entre les droites du côté de la spirale, la spirale elle-même et la droite prolongée[1], d'une part, à l'aire, d'autre part, comprise entre la circonférence du plus petit cercle, la même spirale et la droite joignant les extrémités de ces lignes courbes, est égal au rapport entre la somme du rayon du plus petit cercle et les deux tiers de la différence entre le rayon du plus grand cercle et le rayon du plus petit, d'une part, et la somme, d'autre part, du rayon du plus petit cercle et du tiers de la dite différence[2].

De ces théorèmes, donc, ainsi que d'autres théorèmes concernant la spirale, les démonstrations sont rédigées dans ce livre ; elles y sont précédées, comme dans les autres traités de géométrie, des propositions utiles pour la démonstration. Parmi ces propositions je range aussi un postulat énoncé déjà dans les livres publiés précédemment[3], à savoir qu'il soit possible que la différence, dont la plus grande grandeur dépasse la plus petite parmi les lignes inégales et les aires inégales, ajoutée à elle-même (sc. un nombre suffisant de fois) dépasse toute grandeur donnée parmi celles qui sont comparables entre elles.

1.

Si un point se déplace d'un mouvement uniforme sur une certaine ligne et qu'on prend sur cette ligne deux segments, les segments pris sont entre eux dans le même rapport que les temps mis par le point à les parcourir.

Qu'un point se déplace, en effet, d'un mouvement uniforme sur la ligne AB ; prenons sur elle deux segments ΓΔ et ΔE ; soit ZH le temps pendant lequel le point

1-3. Cf. les notes compl.

ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν τοῦτον ἕξειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. Τούτων δή μοι καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἕλικος αἱ ἀποδείξιες ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράφονται, πρόκεινται δέ, ὡς καὶ τῶν ἄλλων τῶν γεωμετρουμένων, τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτῶν. Λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λῆμμα τόδε · τᾶν ἀνισᾶν γραμμᾶν καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερίσχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων.

α′.

Εἴ κα κατά τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαί, αἱ ἀπολαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας ὅνπερ οἱ χρόνοι, ἐν οἷς τὸ σαμεῖον τὰς γραμμὰς ἐπορεύθη.

Ἐνηνέχθω γάρ τι σαμεῖον κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς ἰσοταχέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ, ἔστω δὲ ὁ χρόνος, ἐν ᾧ τὰν ΓΔ γραμμὰν τὸ

4 ἕξειν Heiberg : ἕξει codd. ‖ 5 ᾇ G : ἃς DEH ‖ 6 μείζονος... κέντρου τοῦ B : om. DEGH ‖ 8 ἐλάσσονος DEGH : maioris B ‖ 13-14 λῆμμα τόδε Heiberg : λήματα δὲ D λήμματα τάδε BEGH λημμάτων τόδε Nizzius ‖ 14 ἀνισᾶν BG : ἰσᾶν DEH ‖ 15-16 αὐτὰν ἑαυτᾷ Heiberg : αὐτᾷ DEGH ipsum B ‖ 24 ἐνηνέχθω Heiberg : ἠνέχθω DEGH.

a parcouru le segment ΓΔ, et HΘ le temps pendant lequel il a parcouru ΔE. Il faut montrer que le rapport du segment ΓΔ au segment ΔE est égal au rapport du temps ZH au temps HΘ.

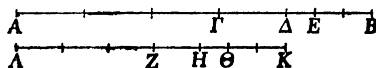


Fig. 1

Composons à cette fin les lignes AΔ, ΔB, de quelque manière que ce soit, au moyen des segments ΓΔ et ΔE, mais de façon que AΔ excède ΔB ; que le temps ZH soit contenu autant de fois dans le temps ΛH que le segment ΓΔ est contenu de fois dans le segment AΔ, et que le temps ΘH soit contenu dans le temps KH autant de fois que le segment ΔE est contenu de fois dans le segment ΔB. Du moment, dès lors, qu'on a supposé que le point se déplace d'un mouvement uniforme sur la ligne AB, il évident qu'il met autant de temps à parcourir les segments égaux au segment ΓΔ qu'il met à parcourir ΓΔ ; il est donc manifeste que le point parcourt aussi la ligne composée AΔ en un temps égal au temps ΛH, puisque le segment ΓΔ est contenu autant de fois dans la ligne AΔ que le temps ZH est contenu de fois dans le temps ΛH. Pour les mêmes raisons donc le point parcourt aussi la ligne BΔ en un temps égal au temps KH. Or la ligne AΔ étant supérieure à la ligne BΔ, il est évident que le point met plus de temps à parcourir la ligne ΔA qu'il n'en met à parcourir la ligne BΔ ; il s'ensuit que le temps ΛH est supérieur au temps KH. On montrera de la même manière que, si on compose au moyen des temps ZH et HΘ des temps de quelque manière que ce soit, mais de façon que ces temps se dépassent l'un l'autre, des lignes composées au moyen des segments ΓΔ et ΔE de la même manière que les temps, ce sera

σαμεῖον διεπορεύθη, ὁ ΖΗ, ἐν ᾧ δὲ τὰν ΔΕ, ὁ ΗΘ. Δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΓΔ γραμμὰ ποτὶ τὰν ΔΕ γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΖΗ ποτὶ τὸν ΗΘ.

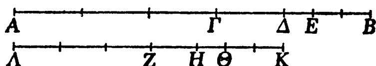


Fig. 1

Συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τᾶν ΓΔ, ΔΕ γραμμᾶν αἱ ΑΔ, ΔΒ γραμμαὶ καθ' ἀντινοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥστε ὑπερέχειν τὰν ΑΔ τᾶς ΔΒ, καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἁ ΓΔ γραμμὰ ἐν τᾷ ΑΔ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ ΖΗ ἐν τῷ χρόνῳ τῷ ΛΗ, ὁσάκις δὲ σύγκειται ἁ ΔΕ γραμμὰ ἐν τᾷ ΔΒ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ ΘΗ χρόνος ἐν τῷ ΚΗ χρόνῳ. Ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σαμεῖον ἰσοταχέως ἐνηνέχθαι κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς, δῆλον ὡς, ἐν ὅσῳ χρόνῳ τὰν ΓΔ ἐνήνεκται, ἐν τοσούτῳ καὶ ἑκάσταν ἐνήνεκται τᾶν ἰσᾶν τᾷ ΓΔ· φανερὸν οὖν ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν ΑΔ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ ΛΗ χρόνος, ἐπειδὴ τοσαυτάκις σύγκειται ἅ τε ΓΔ γραμμὰ ἐν τᾷ ΑΔ γραμμᾷ καὶ ὁ ΖΗ χρόνος ἐν τῷ ΛΗ χρόνῳ. Διὰ ταὐτὰ δὴ καὶ τὰν ΒΔ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ τὸ σαμεῖον ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ ΚΗ χρόνος. Ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἁ ΑΔ γραμμὰ τᾶς ΒΔ, δῆλον ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὰν ΔΑ διαπορεύεται γραμμὰν ἢ τὰν ΒΔ· ὥστε ὁ χρόνος ὁ ΛΗ μείζων ἐστὶ τοῦ ΚΗ χρόνου. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἐκ τῶν χρόνων τῶν ΖΗ, ΗΘ συντεθέωντι χρόνοι καθ' ἀντινοῦν σύνθεσιν, ὥστε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου, ὅτι καὶ τᾶν ἐκ τᾶν γραμμᾶν τᾶν ΓΔ, ΔΕ κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συντε-

2 ΓΔ ms. B : ΑΔ mss. DEGH ‖ 17 ταὐτὰ B : ταῦτα DE GH τὰ αὐτὰ Torellius.

celle qui correspond au temps excédant l'autre temps qui excédera l'autre ligne. Il est donc évident que le rapport de la ligne ΓΔ à la ligne ΔE est égal au rapport[1] du temps ZH au temps HΘ.

2.

Si deux points se déplacent, chacun d'un mouvement uniforme et chacun sur une ligne à lui, et si sur chacune de ces lignes on prend deux segments, dont les premiers et les seconds soient parcourus par les points dans des temps égaux, les segments ainsi pris ont entre eux le même rapport.

Soit un point se déplaçant d'un mouvement uniforme sur la ligne AB, et un autre point se déplaçant sur la ligne KΛ ; prenons sur AB deux segments de ligne ΓΔ et ΔE, et sur KΛ les segments ZH et HΘ ; que le point se déplaçant sur la ligne AB parcoure le segment ΓΔ dans le même temps dans lequel le point se déplaçant sur KΛ parcourt le segment ZH, et que, de même, le (sc. premier) point parcoure ΔE dans le même temps dans lequel l'autre point parcourt HΘ. Il faut montrer que le rapport de ΓΔ à ΔE est égal au rapport de ZH à HΘ.

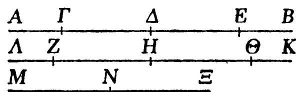


Fig. 2

Soit MN le temps mis par le point à parcourir le segment ΓΔ ; pendant ce temps, donc, l'autre point parcourt ZH. Soit encore NΞ le temps dans lequel

1. Cf. Eucl. V, déf. 5.

θεισᾶν ὑπερέξει ἁ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ· δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΖΗ ποτὶ τὸν χρόνον τὸν ΗΘ.

β'.

Εἴ κα δύο σαμείων ἑκατέρου κατά τινος γραμμᾶς ἐνεχθέντος μὴ τᾶς αὐτᾶς ἰσοταχέως αὐτοῦ ἑαυτῷ φερομένου λαφθέωντι ἐν ἑκατέρᾳ τᾶν γραμμᾶν δύο γραμμαί, ἃν αἵ τε πρῶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὸ τῶν σαμείων διανυέσθων καὶ αἱ δεύτεραι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας αἱ λαφθεῖσαι γραμμαί.

Ἔστω κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς ἐνηνεγμένον τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ καὶ ἄλλο κατὰ τᾶς ΚΛ, λελάφθωσαν δὲ ἐν τᾷ ΑΒ δύο αἱ ΓΔ, ΔΕ γραμμαί, καὶ ἐν τᾷ ΚΛ αἱ ΖΗ, ΗΘ, ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς ἐνηνεγμένον σαμεῖον τὰν ΓΔ γραμμὰν διαπορευέσθω, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον κατὰ τᾶς ΚΛ ἐνηνεγμένον τὰν ΖΗ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰν ΔΕ γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω τὸ σαμεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον τὰν ΗΘ. Δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ἁ ΖΗ ποτὶ τὰν ΗΘ.

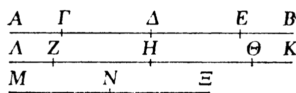


Fig. 2

Ἔστω δὴ ὁ χρόνος, ἐν ᾧ τὰν ΓΔ γραμμὰν διεπορεύετο τὸ σαμεῖον, ὁ ΜΝ· ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ΖΗ. Πάλιν δὴ καὶ ἐν ᾧ τὰν

6 αὐτοῦ G : αὐτῷ DEH ipsum B || 7 ἂν add. Heiberg || 13 τᾷ pr. G : τῷ DEH || 15 ἐνηνεγμένον Heiberg : ἠνεγμένον DEGH || 22 δὴ BCDEGH : δὲ Torellius.

le point parcourt ΔE ; pendant ce temps, l'autre point parcourt le segment HΘ ; il s'ensuit que le rapport entre les segments ΓΔ et ΔE est égal au rapport entre les temps MN et NΞ et que les segments ZH et HΘ ont entre eux le même rapport[1] que les temps MN et NΞ. Il est donc évident que le rapport entre les segments ΓΔ et ΔE est égal au rapport entre les segments ZH et HΘ.

3.

Des cercles étant donnés en quelque nombre que ce soit, il est possible de prendre un segment de droite supérieur à la somme des circonférences de ces cercles.

Un polygone étant, en effet, circonscrit à chacun des cercles, il est évident que le segment de droite qui est la somme des périmètres de tous les polygones sera supérieur à la somme de toutes les circonférences des cercles[2].

4.

Deux lignes inégales étant données, un segment de droite et une circonférence de cercle, il est possible de prendre un segment de droite inférieur à la plus grande et supérieur à la plus petite des lignes données.

L'excédent, en effet, de la plus grande ligne sur la plus petite, ajouté un nombre suffisant de fois à lui-même[3], dépassera la droite, de façon que si nous divisons le segment de droite en un même nombre de parties, le segment partiel sera inférieur à l'excédent. Si maintenant la circonférence de cercle est plus grande que le segment de droite, il suffit d'ajouter un segment partiel au segment de droite pour que, de toute évidence, la somme soit supérieure à la plus petite des lignes données et inférieure à la plus grande ; mais si la circon-

1. Cf. prop. 1.
2. Cf. *De la sphère et du cylindre*, I, 1.
3. Cf. le postulat énoncé plus haut, à la fin de la lettre à Dosithée.

ΔΕ γραμμὰν διεπορεύετο τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ ΝΞ χρόνος· ἐν τούτῳ δὴ καὶ τὸ ἕτερον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ΗΘ· τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἑξοῦντι ἅ τε ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΜΝ ποτὶ ΝΞ, καὶ ἁ ΖΗ ποτὶ τὰν ΗΘ, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΜΝ ποτὶ τὸν ΝΞ. Δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ἁ ΖΗ ποτὶ τὰν ΗΘ.

γ′.

Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει δυνατόν ἐστιν εὐθεῖαν λαβεῖν μείζονα ἐοῦσαν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

Περιγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου δῆλον ὡς ἁ ἐκ πασᾶν συγκειμένα τᾶν περιμέτρων εὐθεῖα μείζων ἐσσεῖται πασᾶν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

δ′.

Δύο γραμμᾶν δοθεισᾶν ἀνισᾶν, εὐθείας τε καὶ κύκλου περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθεῖαν τᾶς μὲν μείζονος τᾶν δοθεισᾶν γραμμᾶν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα.

Ὁσάκις γὰρ ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας, εἰς τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας τὸ ἓν τμᾶμα ἔλασσον ἐσσεῖται τᾶς ὑπεροχᾶς. Εἰ μὲν οὖν κα ᾖ ἁ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας, ἑνὸς τμάματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν εὐθεῖαν τᾶς μὲν ἐλάσσονος τᾶν δοθεισᾶν δῆλον ὡς μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος

5 ΝΞ ms. B : ΜΞ mss. DEGH ‖ 21 αὐτὰ ἑαυτᾷ Heiberg : αὐτᾷ BCDEGH ‖ 22 εἰς Heiberg : καὶ εἰς BDEGH ‖ 24 κα ᾖ Heiberg : καὶ BDEGH ‖ 26 μείζων GH : μεῖζον DE ‖ μείζονος BCGH : μείζονας DE.

férence est plus petite (sc. que le segment de droite), il suffit d'ajouter un segment partiel à la circonférence pour que cette somme soit, de même, supérieure à la plus petite (sc. des lignes données) et inférieure à la plus grande ; car la partie ajoutée est inférieure à l'excédent.

5.

Étant donné un cercle et une droite tangente au cercle, il est possible de mener du centre du cercle une droite vers la tangente de manière que le rapport du segment de droite, intercepté entre la tangente et la circonférence du cercle, au rayon soit inférieur au rapport entre l'arc du cercle compris entre le point de contact et la droite menée (sc. du centre) d'une part et, d'autre part, un arc de cercle quelconque donné.

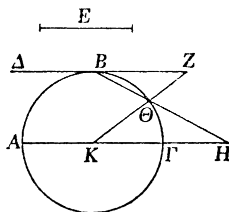


Fig. 3

Soit donné le cercle ΑΒΓ ; soit Κ son centre et ΔΖ une tangente au cercle au point Β ; soit donné, de plus, un arc de cercle quelconque ; or il est possible[1] de prendre un segment de droite plus grand que l'arc donné ; soit Ε un segment de droite supérieur à cet arc donné ; menons par le centre Κ parallèlement à ΔΖ la droite ΑΗ et plaçons le segment de droite ΗΘ, égal au segment Ε et orienté vers le point Β[2]. Joignons

1. Cf. prop. 3.
2. Archimède ne se prononce pas sur les moyens de réaliser cette construction. Pour une solution du problème, cf. P. Ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède*, I, p. 247.

ἐλάσσων· εἰ δέ κα ἐλάσσων, ἑνὸς τμάματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν περιφέρειαν ὁμοίως τᾶς μὲν ἐλάσσονος μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων· καὶ γὰρ ἁ ποτικειμένα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑπεροχᾶς.

ε'.

Κύκλου δοθέντος καὶ εὐθείας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ἐπὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς διαχθείσας ποτὶ τὰν δοθεῖσαν ὁποιανοῦν κύκλου περιφέρειαν.

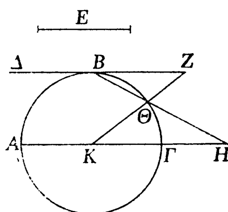


Fig. 3

Δεδόσθω κύκλος ὁ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ ΔΖ κατὰ τὸ Β, δεδόσθω δὲ καὶ κύκλου περιφέρεια ὁποιαοῦν· δυνατὸν δέ ἐστι τᾶς δοθείσας περιφερείας λαβεῖν τινα εὐθεῖαν μείζονα, καὶ ἔστω ἁ Ε εὐθεῖα μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας· ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Κ κέντρου παρὰ τὰν ΔΖ ἁ ΑΗ, καὶ κείσθω ἁ ΗΘ ἴσα τᾷ Ε νεύουσα ἐπὶ τὸ Β. Ἀπὸ δὴ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὸ Θ

1 εἰ ... 3 ἐλάσσων add. Heiberg.

le centre K au point Θ et prolongeons KΘ ; dès lors, le rapport de ΘZ à ΘK est égal au rapport de BΘ à ΘH. Le rapport de ZΘ à ΘK est donc inférieur au rapport de l'arc BΘ à l'arc de cercle donné, puisque le segment de droite BΘ est inférieur à l'arc BΘ[1], et que ΘH est supérieur à l'arc de cercle donné[2] ; il s'ensuit que le rapport de ZΘ au rayon du cercle est à son tour inférieur au rapport de l'arc BΘ à l'arc de cercle donné.

6.

Étant donné un cercle et dans le cercle une corde inférieure au diamètre, il est possible de mener du centre du cercle vers la circonférence une droite coupant la corde donnée, de manière que le segment de droite intercepté entre la circonférence et la corde donnée ait au segment de droite, joignant l'extrémité, située sur la circonférence, de la droite menée (sc. du centre du cercle) à l'une des extrémités de la corde donnée, un rapport donné, à condition que ce rapport soit inférieur au rapport entre la moitié de la corde et l'apothème de cette corde.

Fig. 4

1. Cf. *De la sph. et du cyl.*, I, postulat 1.
2. Cf. Eucl. V, 8.

ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω· τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἔχει ἁ ΘΖ ποτὶ τὰν ΘΚ, ὃν ἁ ΒΘ ποτὶ τὰν ΘΗ. Ἁ ἄρα ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἁ ΒΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν, διότι ἁ μὲν ΒΘ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΒΘ περιφερείας, ἁ δὲ ΘΗ μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει καὶ ἁ ΖΘ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἢ ἁ ΒΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

ϛ′.

Κύκλου δοθέντος καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰν ἐν τῷ κύκλῳ δεδομέναν γραμμάν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ποτιπεσούσας τοῦ ἐπὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὸ ἕτερον πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας εὐθείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ᾖ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν.

Fig. 4

17 πέρας Torellius : μέρος codd. || 18 κα Heiberg : καὶ codd. || 19 ᾖ B : ᾖν DEGH || 20 ἀγμέναν B : ἀγμένων DEGH.

Soit donné le cercle ΑΒΓ, soit Κ son centre et ΓΑ une corde inférieure au diamètre ; que le rapport entre les segments de droite Ζ et Η soit inférieur au rapport entre ΓΘ et ΚΘ, ΚΘ étant l'apothème (sc. de ΑΓ) ; du centre menons ΚΝ parallèlement à ΑΓ, et élevons sur ΚΓ la perpendiculaire au point Γ, soit ΓΛ ; les triangles ΓΘΚ et ΓΚΛ sont alors semblables[1] ; ΓΘ est donc à ΘΚ comme ΚΓ est à ΓΛ[2] ; il s'ensuit que le rapport de Ζ à Η est inférieur au rapport de ΚΓ à ΓΛ. Soit donc un segment de droite supérieur à ΓΛ et tel que le rapport de ΚΓ à ce segment soit égal au rapport de Ζ à Η[3]. Soit ΒΝ ce segment et qu'il soit placé entre la circonférence et la droite (sc. ΚΝ) en passant par le point Γ ; il est possible, en effet, de découper (sc. la droite ΒΝ) de cette manière[4] ; et elle tombera au delà (sc. de ΓΛ) du moment qu'elle est supérieure à ΓΛ. Puisque, donc, le rapport de ΚΒ à ΒΝ est égal au rapport de Ζ à Η, le rapport de ΕΒ à ΒΓ sera à son tour égal[5] au rapport de Ζ à Η.

7.

Avec les mêmes données, si on prolonge la corde, il est possible de mener du centre une droite vers le prolongement de la corde, de manière que le segment de droite compris entre la circonférence et le prolongement (sc. de la corde) ait au segment de droite joignant l'extrémité du segment intercepté (sc. par le cercle) à l'extrémité de la corde prolongée un rapport donné, à condition que ce rapport soit supérieur au rapport entre la moitié de la corde donnée et l'apothème de cette corde.

1. Cf. Eucl. I, 29.
2. Cf. Eucl. VI, 4.
3. Cf. Eucl. V, 10.
4. Problème analogue à celui de la prop. 5 ; cf. p. 17, n. 2.
5. Cf. Eucl. VI, 2.

Δεδόσθω κύκλος ὁ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἐν αὐτῷ δεδόσθω εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΓΑ, καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ Ζ ποτὶ Η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΚΘ, καθέτου ἐούσας τᾶς ΚΘ· ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν ΑΓ ἁ ΚΝ καὶ τᾷ ΚΓ πρὸς ὀρθὰς ἁ ΓΛ· ὁμοῖα δή ἐστι τὰ ΓΘΚ, ΓΚΛ τρίγωνα. Ἔστιν οὖν ὡς ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΚ οὕτως ἁ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΛ· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η ἢ ἁ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΛ. Ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΚΓ ποτὶ μείζονα τᾶς ΓΛ. Ἐχέτω ποτὶ τὰν ΒΝ, κείσθω δὲ ἁ ΒΝ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας διὰ τοῦ Γ· δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τέμνειν· καὶ πεσεῖται ἐκτός, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν τᾶς ΓΛ. Ἐπεὶ οὖν ἁ ΚΒ ποτὶ ΒΝ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ Ζ ποτὶ Η, καὶ ἁ ΕΒ ποτὶ ΒΓ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὃν ἁ Ζ ποτὶ Η.

ζ′.

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένας δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἐναπολαφθείσας ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἐκβεβλημένας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ᾖ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν.

6 ποτὶ B : om. CDEGH ‖ 12 ἐπεὶ BDEGH : ἐπὶ C ‖ 13 KB ms. D : ΚΓ mss. BEGH ‖ 22 κα Heiberg : καὶ codd.

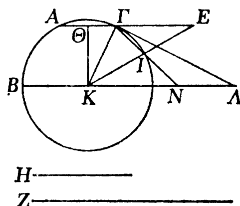


Fig. 5

Donnons-nous les mêmes éléments et prolongeons la corde ; que le rapport donné soit celui de Z à H, et qu'il soit supérieur au rapport de ΓΘ à ΘK ; il sera donc aussi supérieur au rapport de KΓ à ΓΛ. Par conséquent KΓ aura à un segment inférieur à ΓΛ le rapport[1] qu'a Z à H. Soit IN ce segment, et qu'il soit orienté vers Γ ; il est en effet possible[2] de découper (sc. la droite ΓN) de cette manière, et elle tombera en deçà de ΓΛ comme étant inférieure au segment ΓΛ. Du moment donc que le rapport de KΓ à IN est égal au rapport de Z à H, le rapport de EI à IΓ sera lui aussi égal au rapport de Z à H.

8.

Étant donné un cercle, dans le cercle une corde inférieure au diamètre et une tangente au cercle menée par une extrémité de la corde donnée, il est possible de mener du centre du cercle une droite vers la corde, de manière que le segment qui en est intercepté entre la circonférence et la corde donnée ait un rapport donné au segment intercepté sur la tangente, à condition que ce rapport soit inférieur au rapport entre la moitié de la corde donnée et l'apothème de cette corde.

1. Cf. Eucl. V, 10.
2. Cf. p. 17, n. 2.

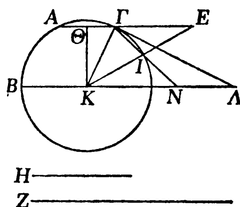


Fig. 5

Δεδόσθω τὰ αὐτά, καὶ ἔστω ἁ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐκϐεϐλημένα, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔστω, ὃν ἔχει ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΚ· μείζων οὖν ἐσσεῖται καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΚΓ ποτὶ ΓΛ. Ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ Ζ ποτὶ Η, τοῦτον ἕξει ἁ ΚΓ ποτὶ ἐλάσσονα τᾶς ΓΛ. Ἐχέτω ποτὶ ΙΝ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Γ· δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τέμνειν· καὶ πεσεῖται ἐντὸς τᾶς ΓΛ, ἐπειδὴ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΓΛ. Ἐπεὶ οὖν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΚΓ ποτὶ ΙΝ ὃν ἁ Ζ ποτὶ Η, καὶ ἁ ΕΙ ποτὶ ΙΓ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὃν ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η.

η′.

Κύκλου δοθέντος καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου καὶ ἄλλας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιϐαλεῖν τινα εὐθεῖαν ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ᾽ αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἢ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν.

9 ἕξει BG : ἕξουσι DEH ‖ 19 εἴ κα DEGH : etsi B ‖ 20 ἢ Heiberg : ἐστὶ DEGH sit B.

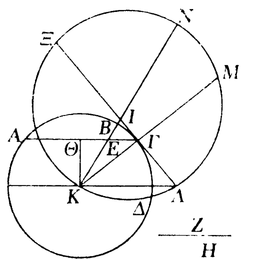


Fig. 6

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné, et que soit donnée dans le cercle la corde ΓΑ, inférieure au diamètre ; soit ΞΛ la tangente au cercle au point Γ ; que le rapport entre les segments de droite Z et H soit inférieur au rapport de ΓΘ à ΘΚ. Ce rapport (sc. de Z à H) sera donc aussi inférieur au rapport de ΓΚ à ΓΛ, si ΚΛ est mené parallèlement à ΘΓ. Dès lors, que le rapport de ΚΓ à ΓΞ soit égal au rapport de Z à H ; ΞΓ est donc supérieur à ΓΛ[1]. Décrivons une circonférence de cercle passant par les points Κ, Λ, Ξ. Du moment donc que le segment de droite ΞΓ est supérieur au segment ΓΛ et que les droites ΚΓ et ΞΛ sont perpendiculaires l'une à l'autre, il est possible de placer un segment de droite ΙΝ égal au segment ΜΓ de façon qu'il soit orienté[2] vers Κ. Le rectangle de côtés ΞΙ et ΙΛ est donc au rectangle de côtés ΚΕ et ΙΛ comme ΞΙ est à ΚΕ, et le rectangle de côtés ΚΙ et ΙΝ est au rectangle de côtés ΚΙ et ΓΛ comme ΙΝ est à ΓΛ ; il s'ensuit que le rapport de ΙΝ à ΓΛ est lui aussi égal au rapport de ΞΙ à ΚΕ[3], d'où l'on déduit que les rapports de ΓΜ à ΓΛ, de ΞΓ à ΚΓ, de ΞΓ à ΚΒ sont à leur tour égaux au rapport de ΞΙ à ΚΕ, et que le rapport du reste ΙΓ à ΒΕ est égal au rapport de ΞΓ à ΓΚ[4] et au rapport de H à Z. La droite ΚΝ rencontre donc la tangente, et le rapport entre le segment ΒΕ compris

1. Cf. Eucl. V, 10.
2. Cf. Pappus, ed. Hultsch, I, p. 298.
3. Cf. Eucl. III, 35 et VI, 2.
4. Cf. Eucl. V, 16, 19, 35.

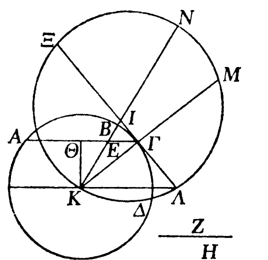


Fig. 6

Ἔστω κύκλος δεδομένος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα δεδόσθω ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΓΑ, καὶ ἁ ΞΛ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Γ, καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ Ζ ποτὶ Η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΓΘ ποτὶ ΘΚ· ἐσσεῖται δὴ ἐλάσσων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΓΚ ποτὶ ΓΛ, εἴ κα παράλληλος ἀχθῇ ἁ ΚΛ τᾷ ΘΓ· ἐχέτω δὴ ἁ ΚΓ ποτὶ ΓΞ τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ Ζ ποτὶ Η· μείζων δή ἐστιν ἁ ΞΓ τᾶς ΓΛ. Γεγράφθω κύκλου περιφέρεια περὶ τὰ Κ, Λ, Ξ. Ἐπεὶ οὖν ἐστι μείζων ἁ ΞΓ τᾶς ΓΛ, καὶ ποτ' ὀρθάς ἐντι ἀλλάλαις αἱ ΚΓ, ΞΛ, δυνατόν ἐστι τᾷ ΜΓ ἴσαν ἄλλαν θέμεν τὰν ΙΝ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Κ. Τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΙΛ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΕ, ΙΛ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙΝ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙ, ΓΛ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ΙΝ ποτὶ ΓΛ· ὥστε καὶ ἁ ΙΝ ποτὶ ΓΛ ἐστὶν ὡς ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ· ὥστε καὶ ἁ ΓΜ ποτὶ ΓΛ καὶ ἁ ΞΓ ποτὶ ΚΓ καὶ ποτὶ ΚΒ ἐστὶν ὡς ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, καὶ λοιπὰ ἁ ΙΓ ποτὶ ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ΞΓ ποτὶ τὰν ΓΚ καὶ ὃν ἁ Η ποτὶ Ζ. Πέπτωκεν οὖν ἁ ΚΝ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς περιφερείας

7 δή Torellius : δέ codd. || 11 τᾶν Torellius : τοῦ codd. || 14 τὸν αὐτὸν... ποτὶ ΓΛ add. Commandinus || 18 Ζ Heiberg : τὸ Ζ mss. DEGH.

entre la circonférence et la corde d'une part, et, d'autre part, le segment intercepté sur la tangente est égal au rapport de Z à H.

9.

Avec les mêmes données, si on prolonge la corde donnée, il est possible de mener du centre du cercle vers le prolongement de la corde une droite telle que le rapport entre le segment compris entre la circonférence et le prolongement de la corde, d'une part, et, d'autre part, le segment intercepté sur la tangente à partir du point de contact soit égal à un rapport donné, à condition que ce rapport soit supérieur au rapport entre la moitié de la corde donnée et l'apothème de cette corde.

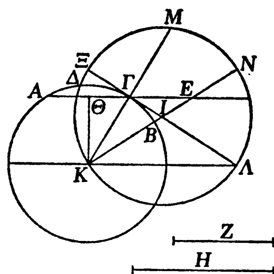


Fig. 7

Soit donné le cercle ΑΒΓΔ ; menons-y la corde ΓΑ inférieure au diamètre ; soit ΞΓ la tangente au cercle au point Γ ; (sc. soient Z et H deux segments tels que) le rapport de Z à H soit supérieur au rapport de ΓΘ à ΘΚ ; ce rapport sera donc aussi supérieur au rapport de ΚΓ à ΓΛ. Soit ΚΓ à ΓΞ comme Z est à H ; il s'ensuit que ce segment (sc. ΓΞ) est inférieur à ΓΛ[1].

1. Cf. Eucl. V, 10.

καὶ τᾶς εὐθείας ἁ ΒΕ ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η.

θ′.

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ἐκβεβλημένας δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ποτὶ τὰν ἁφὰν τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ᾖ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν.

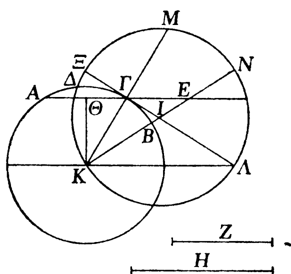


Fig. 7

Δεδόσθω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΓΑ διάχθω, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ ΞΓ κατὰ τὸ Γ, καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΚ· ἐσσεῖται δὴ μείζων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΛ. Ἐχέτω οὖν ἁ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΞ τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν αὕτα τᾶς ΓΛ.

2 αὐτὸν BG : αὐτὸν ἔχει DEH ‖ H mss. BG : H λόγον DEH ‖ 10 ᾖ B : om. DEGH.

Décrivons de nouveau un cercle passant par les points Ξ, K, Δ. Le segment ΞΓ étant ainsi inférieur à ΓΛ, et les segments KM et ΞΓ étant perpendiculaires l'un à l'autre, il est possible[1] de placer un segment IN, égal à ΓM, de manière qu'il soit orienté vers le point K. Dès lors, puisque le rectangle de côtés ΞI et IΛ est au rectangle de côtés ΛI et KE comme ΞI est à KE, que le rectangle de côtés ΞI et IΛ est équivalent au rectangle de côtés KI et IN[2] et que, enfin, le rectangle de côtés ΛI et KE est équivalent au rectangle de côtés KI et ΓΛ à cause de l'égalité entre le rapport de KE à IK et le rapport de ΛΓ à ΛI[3], il s'ensuit que ΞI est à KE comme le rectangle de côtés KI et IN est au rectangle de côtés KI et ΓΛ, c'est-à-dire comme NI est à ΓΛ, et encore comme ΓM est à ΓΛ. Or ΓM est aussi à ΓΛ comme ΞΓ est à KΓ[2], c'est-à-dire à KB ; il s'ensuit que le rapport de ΞI à KE est égal au rapport de ΞΓ à KB, et que le rapport du reste IΓ au reste BE est égal au rapport de ΞΓ à ΓK. Mais ΞΓ est à ΓK comme H est à Z ; la droite KE rencontre donc le prolongement de la corde, et le rapport entre le segment BE compris entre ce prolongement et la circonférence, d'une part, et, d'autre part, le segment ΓI découpé sur la tangente est égal au rapport de Z à H.

10.

Si des segments de droite en nombre quelconque, se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, sont disposés les uns à la suite des autres, l'excédent étant égal au plus petit, et si on se donne un même nombre d'autres segments dont chacun a la grandeur du plus grand des premiers, les carrés sur les segments égaux au plus grand, augmentés du carré sur le plus grand et du rectangle ayant pour côtés le plus petit segment et la somme de tous les segments qui se dépassent l'un l'autre de la même grandeur, sont équivalents à la triple somme des carrés sur les segments qui se dépassent l'un l'autre de la même grandeur.

1-3. Cf. les notes compl.

Πάλιν δὴ γεγράφθω κύκλος διὰ τῶν Ξ, Κ, Λ σαμείων. Ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ΞΓ τᾶς ΓΛ, καὶ ποτ᾽ ὀρθὰς ἐντι ἀλλάλαις αἱ ΚΜ, ΞΓ, δυνατὸν τᾷ ΓΜ ἴσαν θέμεν τὰν ΙΝ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Κ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΙΛ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΛΙ, ΚΕ ἐστὶν ὡς ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τᾶν ΞΙΛ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙΝ, τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ΛΙ, ΚΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙ, ΓΛ διὰ τὸ εἶμεν ὡς τὰν ΚΕ ποτὶ ΙΚ οὕτως τὰν ΛΓ ποτὶ ΛΙ, καὶ ὡς ἄρα ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙΝ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙ, ΓΛ, τουτέστιν ὡς ἁ ΝΙ ποτὶ ΓΛ, τουτέστιν ἁ ΓΜ ποτὶ ΓΛ. Ἔστιν δὲ καὶ, ὡς ἁ ΓΜ ποτὶ ΓΛ, ἁ ΞΓ ποτὶ ΚΓ, τουτέστι ποτὶ ΚΒ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, ἁ ΞΓ ποτὶ ΚΒ, καὶ λοιπὰ ἁ ΙΓ ποτὶ λοιπὰν τὰν ΒΕ ἐστὶν ὡς ἁ ΞΓ ποτὶ ΓΚ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΞΓ ποτὶ ΓΚ, τοῦτον ἔχει ἁ Η ποτὶ Ζ· ποτιπέπτωκεν δὴ ἁ ΚΕ ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, καὶ ἁ μεταξὺ τᾶς ἐκβεβλημένας καὶ τᾶς περιφερειάς ἁ ΒΕ ποτὶ τὰν ΓΙ τὰν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η.

ι′.

Εἴ κα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἐλαχίστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχούσαις τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν.

5 ΛΙ, ΚΕ ms. D : il ke B ΛΚΕ mss. EGH ‖ ἁ add. Heiberg ‖ 6 τῷ B : τὸ DEGH ‖ 11 ἁ pr. add. Heiberg ‖ 23 τᾷ DEGH : om. C ‖ 26 ταῖς C : om. DEGH.

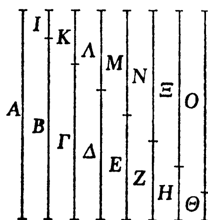


Fig. 8

Soient A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ des segment de droite en nombre quelconque, se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur et placés les uns à la suite des autres ; que Θ soit égal à l'excédent ; ajoutons à B le segment I égal à Θ, à Γ le segment K égal à H, à Δ le segment Λ égal à Z, à E le segment M égal à E, à Z le segment N égal à Δ, à H le segment Ξ égal à Γ, à Θ le segment O égal à B ; les segments ainsi obtenus seront égaux entre eux et égaux au plus grand. Il faut donc montrer que la somme des carrés sur A et sur les segments obtenus (sc. par les additions mentionnées), augmentée du carré sur A et du rectangle ayant pour côtés le segment Θ et le segment qui est la somme des segments A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, est égale à la triple somme des carrés sur A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ[1].

Le carré sur BI (c'est-à-dire sur la somme des segments B et I) est équivalent[2] à la somme des carrés sur I et B et du double du rectangle de côtés B et I, le carré sur KΓ est équivalent à la somme des carrés sur K et Γ et du double rectangle de côtés K et Γ, et de la même manière aussi les carrés sur les autres segments égaux à A sont équivalents à la somme des carrés sur les segments partiels et du double rectangle ayant pour côtés les segments partiels. Or la somme des carrés sur A, B,

1. En termes algébriques, il faut démontrer l'égalité :
$A^2 + (B+I)^2 + (\Gamma+K)^2 + (\Delta+\Lambda)^2 + (E+M)^2 + (Z+N)^2 + (H+\Xi)^2 + (\Theta+O)^2 + A^2+\Theta\,(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta) = 3(A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2)$.

2. Cf. Eucl. II, 4.



Fig. 8

Ἔστων γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ἁ δὲ Θ ἴσα ἔστω τᾷ ὑπεροχᾷ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ τὰν Β ἴσα τᾷ Θ ἁ Ι, ποτὶ δὲ τὰν Γ ἁ Κ ἴσα τᾷ Η, ποτὶ δε τὰν Δ ἁ Λ ἴσα τᾷ Ζ, ποτὶ δὲ τὰν Ε ἁ Μ ἴσα τᾷ Ε, ποτὶ δὲ τὰν Ζ ἁ Ν ἴσα τᾷ Δ, ποτὶ δὲ τὰν Η ἁ Ξ ἴσα τᾷ Γ, ποτὶ δὲ τὰν Θ ἁ Ο ἴσα τᾷ Β· ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἴσαι ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ. Δεικτέον οὖν ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶς τε Α καὶ τᾶν γενομενᾶν ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τᾶς Α τεράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τριπλάσιά ἐντι τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.

Ἔστιν δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς ΒΙ τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τᾶν Ι, Β τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τᾶν Β, Ι περιεχομένοις, τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ΚΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ τᾶν Κ, Γ τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τᾶν Κ, Γ περιεχομένοις· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τᾶν ἰσᾶν τᾷ Α τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τετραγώνοις καὶ δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν τμαμάτων περιεχομένοις. Τὰ μὲν οὖν ἀπὸ

1 ἔστων Heiberg : ἔστωσαν CEG ἔστω DH ‖ 4 ἁ Λ mss. BCG : ΑΛ ms. H Λ mss. DE ‖ 7 δὴ Nizzius : δὲ codd. ‖ 15 δύο CDEH : δυσὶ G ‖ τᾶν alt. DEGH : om. C ‖ 17 δύο CDEH : δυσὶ G ‖ περιεχομένοις BG : περιεχομένων CDEH ‖ 18 δὲ Torellius : δὴ BCDEH ‖ 20 ὑπὸ BG : ἀπὸ CDEH.

Γ, Δ, E, Z, H, Θ et des carrés sur I, K, Λ, M, N, Ξ, O, augmentée du carré sur A, est équivalente à la double somme des carrés sur A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ[1]. Il nous reste à montrer que la double somme des rectangles ayant pour côtés les segments partiels dans chacun des segments égaux à A, augmentée du rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, est égale à la somme des carrés sur A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ. Du moment, de plus, que le double rectangle de côtés B et I est équivalent au double rectangle de côtés B et Θ, que le double rectangle de côtés K et Γ est équivalent au rectangle de côtés Θ et 4 Γ, puisque K est égal à 2 Θ, que le double rectangle de côtés Δ et Λ est équivalent au rectangle de côtés Θ et 6 Δ, puisque Λ est le triple de Θ, et que, de même, aussi les autres doubles rectangles ayant pour côtés les segments partiels sont équivalents aux rectangles ayant pour côtés Θ et le segment multiple, d'après la suite des nombres pairs, du segment suivant, il s'ensuit que la somme (sc. de tous les doubles rectangles), augmentée du rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, sera équivalente au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de A, 3 B, 5 Γ, et ainsi de suite, toujours d'un multiple, dans l'ordre des nombres impairs, du segment suivant[2]. Mais la somme des carrés sur A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ est, elle aussi, équivalente au rectangle admettant ces côtés. Le carré sur A est en effet équivalent au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de A et des restes, dont chacun est égal[3] à A, puisque Θ est contenu autant de fois dans A que A est contenu de fois dans la somme de A et des segments égaux à A ; il s'ensuit

1. En d'autres termes :
$A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2+I^2+K^2+\Lambda^2+M^2+N^2+\Xi^2+O^2+A^2 = 2\,(A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2)$.
Cette égalité résulte de ce que :
$I = \Theta,\ K = H,\ \Lambda = Z,\ M = E,\ N = \Delta,\ \Xi = \Gamma,\ O = B$.

2 et 3. Cf. notes compl.

τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον διπλάσιά ἐντι τῶν ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετραγώνων· λοιπὸν δὲ ἐπιδειξοῦμες ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ἐν ἑκάστᾳ γραμμᾷ τᾶν ἰσᾶν τᾷ Α ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ Β, Ι περιεχόμενα ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τᾶν Β, Θ περιεχομένοις, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν Κ, Γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς Γ διὰ τὸ τὰν Κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς Θ, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν Δ, Λ ἴσα τῷ ὑπὸ τᾶς Θ καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς Δ διὰ τὸ τὰν Λ τριπλασίαν εἶμεν τᾶς Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς ἀρτίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς, τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἐσσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε Α καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς Β καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς Γ καὶ ἀεὶ τᾷ [περισσᾷ] κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. Ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αὐτᾶν γραμμᾶν. Ἔστι γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας [πάσαις] τᾷ τε Α καὶ τᾷ ἴσᾳ ταῖς λοιπαῖς, ἃν ἑκάστα ἴσα τᾷ Α· ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅ τε Θ τὰν Α καὶ ἁ Α τὰς ἴσας αὐτᾷ πάσας σὺν τᾷ Α· ὥστε ἴσον ἐστὶ

2 Ο ποτιλαβόντα B : ΟΠ ποτιλαβόντα DEH ποτιλαβόντα CG ‖ 5 τῶν pr. add. Heiberg ‖ 22 περισσᾷ del. Heiberg ‖ 23 πολλαπλασίᾳ Heiberg : πολλαπλασίους BCDEGH ‖ 27 πάσαις del. Heiberg ‖ 29 σὺν Torellius : ἐν BCDEGH.

que le carré sur A est équivalent au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment obtenu par l'addition de A à la double somme de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ ; car la somme des segments égaux à A, hormis A, est égale à la double somme de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ. De même, le carré sur B est équivalent au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment obtenu par l'addition de B à la double somme de Γ, Δ, E, Z, H, Θ, le carré sur Γ équivalent au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment obtenu par l'addition de Γ à la double somme de Δ, E, Z, H, Θ, et de la même manière les carrés sur les autres segments sont équivalents aux rectangles ayant pour côtés Θ et la somme du segment même et du double des segments restants. Il est donc évident que la somme des carrés sur tous les segments est équivalente au rectangle ayant pour côtés Θ et le segment égal à la somme de A, de 3 B, de 5 Γ, et ainsi de suite, toujours d'un multiple, dans la suite des nombres impairs, du segment suivant.

Corollaire

Il est manifeste, d'après ce qui précède, que la somme des carrés sur les segments égaux au plus grand est inférieure au triple de la somme des carrés sur les segments se dépassant l'un l'autre de la même grandeur, puisque, si on lui ajoute quelques grandeurs[1], elle en devient le triple, mais qu'elle est supérieure au triple de la seconde somme diminuée du carré sur le plus grand segment, puisque ce qui est ajouté (sc. à la première somme) est inférieur au triple carré sur le plus grand segment[2]. C'est pour cette raison aussi que, si on décrit des figures semblables sur tous les segments, tant sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur que sur ceux qui sont égaux au plus grand segment, la somme des figures décrites sur les segments égaux au plus grand segment est

1 et 2. Cf. notes compl.

τὸ ἀπὸ Α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ Α καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ· αἱ γὰρ ἴσαι τᾷ Α πᾶσαι χωρὶς τᾶς Α διπλάσιαί ἐντι τᾶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς Β τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε Β καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς Γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε Γ καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾷ τε καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν λοιπᾶν. Δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε Α καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς Β καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς Γ καὶ τᾷ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἑπομένας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου οὖν φανερὸν ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἐλάσσονά ἐστιν ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσιά ἐντι, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. Καὶ τοίνυν, εἴ κα ὁμοῖα εἴδεα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ, τὰ εἴδεα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων

2 Β Basil. : ΑΒ mss. BCDEGH ‖ 7 τε CG : om. DEH ‖ 8 Δ ms. B : om. CDEGH ‖ 24 ἀναγραφέωντι C : ἀναγεγραφέωντι DH ἀναγεγραφθέωντι G ἀναγεγραφθέοντι E ‖ 26 τὰ εἴδεα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ add. Commandinus.

inférieure au triple de la somme des figures décrites sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, mais elle est supérieure au triple de la seconde somme diminuée de la figure construite sur le plus grand segment, puisque les figures semblables auront entre elles le même rapport que les carrés[1].

11.

Si des segments de droite en nombre quelconque, se dépassant l'un l'autre de la même grandeur, sont disposés les uns à la suite des autres, et si on dispose d'autres segments, en nombre inférieur d'une unité au nombre de ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, et dont chacun est égal au plus grand (sc. des premiers), le rapport entre la somme des carrés sur les segments égaux au plus grand et la somme des carrés sur les segments qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, sans le carré sur le plus petit, est inférieur au rapport entre le carré sur le plus grand, d'une part, et, d'autre part, l'aire équivalente à la somme du rectangle ayant pour côtés le plus grand et le plus petit et du tiers du carré sur l'excédent du plus grand sur le plus petit, tandis que le rapport (sc. de la somme des carrés sur les segments égaux au plus grand) à la somme des carrés sur les segments qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, sauf le carré sur le plus grand, est supérieur au rapport indiqué.

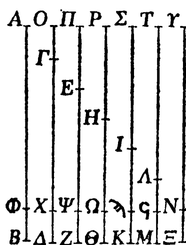


Fig. 9

1. Cf. Eucl. VI, 20.

ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἴδεος μείζονα ἢ τριπλάσια· τὸν γὰρ αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

ια′.

Εἴ κα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνου, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.

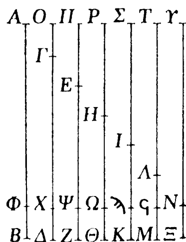


Fig. 9

7 τῷ alt. DEGH : τὸ C ‖ 9 τὰ sec. om. C ‖ 12 τὸ ἴσον DEGH : τὸν ἴσον C ‖ 14 τοῦ B : τῷ DEGH om. C ‖ τετραγώνου B : τετραγώνῳ CDEGH ‖ ᾇ DEGH : τὰ C.

Soit un nombre quelconque de segments de droite se dépassant l'un l'autre et disposés les uns à la suite des autres, de manière que AB soit plus grand que ΓΔ, ΓΔ plus grand que EZ, EZ que HΘ, HΘ que IK, IK que ΛM, ΛM que NΞ ; ajoutons à ΓΔ le segment ΓO égal à un excédent, à EZ le segment EΠ égal à deux excédents, à HΘ le segment HP égal à trois excédents, et ainsi de suite aux autres segments de la même manière ; les segments ainsi obtenus seront alors égaux entre eux, et chacun sera égal au plus grand. Il faut donc montrer que le rapport entre la somme des carrés sur les segments obtenus et la somme des carrés sur les segments qui se dépassent l'un l'autre de la même grandeur, sauf le carré sur NΞ, est inférieur au rapport entre le carré sur AB, d'une part, et, d'autre part, l'aire équivalente à la somme du rectangle de côtés AB et NΞ et du tiers du carré sur NΥ, mais que le rapport (sc. de la somme des carrés sur les segments obtenus) à la somme des carrés des mêmes segments (sc. des segments qui se dépassent l'un l'autre de la même grandeur), sauf le carré sur AB, est supérieur au rapport indiqué.

Retranchons de chacun des segments, qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, un segment égal à l'excédent ; dès lors, le rapport entre le carré sur AB et la somme du rectangle de côtés AB et ΦB et du tiers du carré sur AΦ est égal au rapport entre le carré sur OΔ, d'une part, et, d'autre part, la somme du rectangle de côtés OΔ et ΔX et du tiers du carré sur XO, et au rapport entre le carré sur ΠZ et la somme du rectangle de côtés ΠZ et ΨZ et du tiers du carré sur ΨΠ, et aux rapports entre les carrés sur les autres segments et les aires prises de la même manière ; il s'ensuit[1] que le rapport entre la somme des carrés sur OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, ΥΞ, d'une part, et, d'autre part, la somme des rectangles, ayant pour côtés NΞ et les segments indiqués, et du tiers de la somme

1. Cf. Eucl. V, 12.

Ἔστωσαν γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν ΑΒ τᾶς ΓΔ, ἁ δὲ ΓΔ τᾶς ΕΖ, ἁ δὲ ΕΖ τᾶς ΗΘ, ἁ δὲ ΗΘ τᾶς ΙΚ, ἁ δὲ ΙΚ τᾶς ΛΜ, ἁ δὲ ΛΜ τᾶς ΝΞ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ μὲν τὰν ΓΔ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ ΓΟ, ποτὶ δὲ τὰν ΕΖ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς ἁ ΕΠ, ποτὶ δὲ τὰν ΗΘ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ ΗΡ, καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον· ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. Δεικτέον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν γενομενᾶν τετράγωνα ποτὶ μὲν πάντα τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΝΞ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΝΞ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΝΥ τετραγώνου, ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Ἀπολελάφθω ἀφ' ἑκάστας τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ· ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΦ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τό τε ἀπὸ τᾶς ΟΔ τετράγωνον ποτί τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΟΔ, ΔΧ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΧΟ τετραγώνου καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΖ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΠΖ, ΨΖ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΨΠ τετραγώνου καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία· καὶ τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ ποτί τε πάντα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς καὶ τὰ

4 δὲ alt. B : δὴ CDEGH ‖ τὰν C : τὰ DEGH ‖ 13 ΝΞ mss. BCGH : ΗΞ mss. DE ‖ 27 ΡΘ ms. B : ΡΟ mss. CD EGH ‖ 28 τὰ add. Heiberg ‖ περιεχόμενα BDEGH : περιεχομέναν C.

des carrés sur ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ est égal au rapport du carré sur ΑΒ à la somme du rectangle de côtés ΑΒ et ΦΒ et le tiers du carré sur ΦΑ[1]. Si on démontre, dès lors, que le rectangle, ayant pour côtés ΝΞ et le segment égal à la somme de ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ, augmenté du tiers de la somme des carrés sur ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ est inférieur à la somme des carrés sur ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, mais supérieur à la somme des carrés sur ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ, on aura démontré la proposition.

Or le rectangle ayant pour côtés ΝΞ et la somme des segments ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ, augmenté du tiers de la somme des carrés sur ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ est équivalent à la somme des carrés sur ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϛΜ, ΝΞ, augmentée du rectangle ayant pour côtés ΝΞ et la somme des segments ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ et du tiers de la somme des carrés sur ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ ; d'autre part, la somme des carrés sur ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ est équivalente à la somme des carrés sur ΒΦ, ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϛΜ, augmentée de la somme des carrés sur ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϛ et du rectangle ayant pour côtés ΒΦ et la double somme de ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϛ. Or les carrés sur les segments égaux à ΝΞ sont en commun de part et d'autre, le rectangle ayant pour côtés ΝΞ et la somme des segments ΟΧ, ΠΨ, ΩΡ, ϡΣ, ϛΤ, ΥΝ est inférieur au rectangle ayant pour côtés ΒΦ et la double somme des segments ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϛ, parce que la somme des segments que nous venons d'indiquer est égale à la somme des segments ΓΟ, ΕΠ, ΡΗ, ΙΣ, ΛΤ, ΥΝ et

1. Cf. notes compl.

τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, ΤϚ, ΥΝ τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΦΑ τετραγώνου. Εἰ οὖν κα δειχθῇ τό τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρεα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, ΤϚ, ΥΝ τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ ἐλάττονα, τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν.

Ἐντὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρεα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, ΤϚ, ΥΝ ἴσα τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϚΜ, ΝΞ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, ΤϚ, ΥΝ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, ΤϚ, ΥΝ, τὰ δὲ ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τᾶν ΒΦ, ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϚΜ τετραγώνοις καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, ΛϚ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ΒΦ καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, ΛϚ. Κοινὰ μὲν οὖν ἐντι ἑκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ ΝΞ, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΩΡ, ϡΣ, ϚΤ, ΥΝ ἔλασσόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς ΒΦ καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, ΛϚ διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμὰς ταῖς μὲν ΓΟ, ΕΠ, ΡΗ, ΙΣ, ΛΤ, ΥΝ ἴσας εἶμεν, τᾶν δὲ λοιπᾶν

8 μὲν add. Heiberg ‖ 13 ΥΞ ms. C : ΥΝ mss. BDEGH ‖ 16 τᾶς alt. add. Heiberg ‖ 21 ΗΩ mss. BEG : ΜΩ mss. CDH ‖ Ιϡ mss. BEG : Ρϡ mss. CDH ‖ 22 τᾶς pr. Basil. : τᾶν CDEGH ‖ ΗΩ ms. G : ΝΩ mss. BDEH, ΜΩ ms. C ‖ 24 τε C : om. DEGH ‖ 27 γραμμὰς BCG : γραμμαῖς DEH ‖ 28 ΓΟ mss. BC : ΓΘ mss. DEGH.

supérieure à la somme de leurs restes[1], et la somme des carrés sur ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϟ est supérieure[2] au tiers de la somme des carrés sur ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϟ, ΥΝ ; car cela a été démontré dans ce qui précède ; il s'ensuit que la somme des aires indiquées est inférieure à la somme des carrés sur ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ.

Nous démontrerons, enfin, que la somme de ces aires est supérieure à la somme des carrés sur ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. La somme des carrés sur ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ est ainsi de nouveau équivalente à la somme des carrés sur ΧΓ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϟ, augmentée de la somme des carrés sur ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϟΜ, ΝΞ et du rectangle ayant pour côtés ΝΞ et la double somme[2] des segments ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϟ. De plus, la somme des carrés sur ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, Μϟ, ΝΞ est en commun, tandis que le rectangle ayant pour côtés ΝΞ et la somme des segments ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϟ, ΥΝ est supérieur au rectangle ayant pour côtés ΝΞ et la double somme des segments ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϟ[3]. En outre, la somme des carrés sur ΧΟ, ΨΠ, ΩΡ, ϡΣ, ϟΤ, ΥΝ est supérieure au triple de la somme des carrés sur ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϟ ; car cette propriété a été démontrée elle aussi ; par conséquent la somme des aires indiquées est supérieure à la somme des carrés sur ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ.

Corollaire

Si, dès lors, on construit des figures semblables sur tous les segments, tant sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur que sur ceux qui sont égaux au plus grand, le rapport entre la somme des figures construites sur les segments égaux au plus grand, d'une part, et, d'autre part, la somme des

1. A savoir ΓΧ+ΕΨ+ΗΩ+Ιϡ+Λϟ.
2. Parce que ΓΟ+ΕΠ+ΡΗ+ΙΣ+ΑΤ+ΥΝ > ΓΧ+ΕΨ+ΗΩ+Ιϡ+Λϟ et ΟΧ + ΠΨ + ΩΡ + ϡΣ + ϟΤ + ΥΝ = (ΓΟ+ΕΠ+ΡΗ+ΙΣ+ΛΤ+ΥΝ) + (ΓΧ+ΕΨ+ΗΩ+Ιϡ+Λϟ).
3. Cf. Eucl. II, 4.

μείζονας, καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϞ μείζονά ἐντι τοῦ τρίτου μέρεος τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣϠ, ΤϞ, ΥΝ · δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω · ἐλάττονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ.

Λοιπὸν δὲ δειξοῦμες ὅτι μείζονά ἐντι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. Πάλιν δὴ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν ΧΓ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϞ καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϠΚ, ϞΜ, ΝΞ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϞ. Καί ἐστι κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τᾶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϠΚ, ΜϞ, ΝΞ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣϠ, ΤϞ, ΥΝ τοῦ ὑπὸ τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϞ, ἐντὶ δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΧΟ, ΨΠ, ΩΡ, ϠΣ, ϞΤ, ΥΝ τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϞ μείζονα ἢ τριπλάσια · δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο · μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ τοίνυν εἴ κα ὁμοῖα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ, εἴδεα, πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς

2-3 μείζονά ἐντι τοῦ τρίτου μέρεος τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣϠ, ΤϞ, ΥΝ add. Commandinus et Torellius ‖ 9-10 τοῖς ἀπὸ τᾶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϠΚ, ϞΜ, ΝΞ καὶ add. Commandinus ‖ 11 ΗΩ ms. B : Ω mss. CDEH, ΩΗ ms. G ‖ 13-14 ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣϠ, ΤϞ, ΥΝ τοῦ ὑπὸ τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς om. B ‖ 14 ΠΨ Basil. : ΠΡ mss. DEGH ‖ 16 τὰ pr. C : om. DEGH ‖ 22 ἀναγραφέωντι BCG : ἀναγραφέντι DEH ‖ 24-25 ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τὰ ἀπὸ τᾶν add. Torellius.

figures construites sur les segments qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, sauf la figure construite sur le plus petit segment, sera inférieur au rapport entre le carré sur le plus grand segment, d'une part, et, d'autre part, l'aire équivalente à la somme du rectangle, ayant pour côtés le plus grand et le plus petit segment, et du tiers du carré sur l'excédent du plus grand segment sur le plus petit, tandis que le rapport (sc. de la somme des figures construites sur les segments égaux au plus grand segment) à la somme de ces mêmes figures, sauf la figure construite sur le plus grand segment, sera supérieur au rapport indiqué ; car les figures semblables auront entre elles le même rapport que les carrés[1].

Définitions

1. Si une ligne droite est menée dans un plan et si, l'une de ses extrémités restant sur place, elle tourne avec une vitesse constante un nombre quelconque de fois pour reprendre la position d'où elle est partie ; si, de plus, pendant cette rotation de la ligne droite, un point se meut sur la droite avec une vitesse constante à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan.

2. Nous appellerons origine de la spirale l'extrémité de la droite qui reste immobile pendant que la droite tourne.

3. Nous appellerons origine de la révolution la position de la droite à partir de laquelle la droite commence à tourner.

4. Nous appellerons première droite le segment de droite que le point se déplaçant sur la droite parcourt pendant la première révolution, seconde droite le segment que le même point parcourt pendant la seconde révolution, et nous désignerons de la même manière les autres segments de droite par le nom (sc. d'ordre) des révolutions.

1. Cf. Eucl. VI, 20.

τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου· τὸν αὐτὸν γὰρ ἑξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

ΟΡΟΙ

α′. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

β′. Καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς ἀρχὰ τᾶς ἕλικος.

γ′. Ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς, ἀφ᾿ ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς.

δ′. Εὐθεῖα, ἃν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω, ἃν δ᾿ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν.

2 τὸ pr. CEGH : τῷ D ‖ 10 καὶ add. Torellius ‖ 14 ἑαυτῷ BCGH : ἑαυτὸ DE ‖ 21 εὐθεῖα, ἃν CDEGH : rectum si B.

5. Nous appellerons première aire l'aire comprise entre la (sc. partie de la) spirale décrite pendant la première révolution et la première droite, seconde aire l'aire comprise entre la (sc. partie de la) spirale décrite pendant la seconde révolution et la seconde droite, et ainsi de suite pour les noms des aires suivantes.

6. Si on mène une droite du point qui est l'origine de la spirale, nous appellerons l'avant tout ce qui est situé du côté de la droite vers lequel la révolution se fait, et l'arrière tout ce qui est situé de l'autre côté.

7. Nous appellerons premier cercle le cercle décrit autour du point d'origine de la spirale comme centre avec un rayon égal à la première droite, second cercle le cercle décrit autour du même centre avec un rayon égal au double de ce segment de droite, et ainsi de suite pour les noms des cercles suivants.

12.

Si à une spirale décrite en une seule révolution (sc. d'ordre) quelconque, sont menées, de l'origine de la spirale, des droites en nombre quelconque faisant entre elles des angles égaux, ces droites (c'est-à-dire les segments de ces droites compris entre l'origine et la spirale) se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur[1].

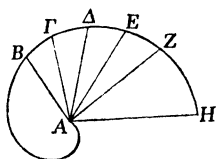


Fig. 10

1. Proposition citée par Pappus, IV, 33.

ε′. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτον καλείσθω, τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας δεύτερον καλείσθω, καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω.

ϛ′. Καὶ εἴ κα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας τὰ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ᾽ ἅ κα ἁ περιφορὰ γένηται, προαγουμένα καλείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπομένα.

ζ′. Ὅ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτος καλείσθω, ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ τᾷ διπλασίᾳ εὐθείᾳ δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

ιβ′.

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν μιᾷ περιφορᾷ ὁποιᾳοῦν γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος εὐθεῖαι ἐμπεσῶντι ὁποιαιοῦν ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ᾽ ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλαλᾶν.

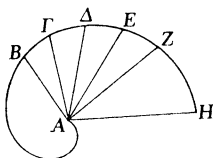


Fig. 10

5-6 καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω om. C ‖ 8 τὰ pr. add. Heiberg ‖ 9 ἐφ᾽ ἅ κα add. Heiberg ‖ 14 τᾷ C : om. DEGH ‖ 17 κα BDEGH : καὶ C ‖ τὰν ἐν Heiberg : τὰ μὲν BCDEGH ‖ 18 γεγραμμέναν C : γεγραμμένα BDEGH.

Soit une spirale dans laquelle les segments de droite AB, AΓ, AΔ, AE, AZ font entre eux des angles égaux. Il faut démontrer que l'excès de AΓ sur AB est égal à l'excès de AΔ sur AΓ et qu'il en est de même pour les autres segments.

En effet, le temps, pendant lequel la droite qui tourne vient de AB en AΓ, est le même que celui pendant lequel le point se déplaçant sur la droite parcourt l'excédent de ΓA sur AB, et pendant le temps que la droite met à venir de AΓ en AΔ le point parcourt l'excédent de AΔ sur AΓ. Mais la droite qui tourne arrive de AB en AΓ en un temps qui est égal à celui qu'elle met à arriver de AΓ en AΔ, puisque les angles sont égaux ; c'est donc dans des temps égaux que le point qui se déplace sur la droite parcourt l'excédent de ΓA sur AB et l'excédent de AΔ sur AΓ. Il s'ensuit que l'excédent de AΓ sur AB est égal à l'excédent de AΔ sur AΓ[1], et il en est de même pour les autres droites.

13.

Si une droite est tangente à une spirale, elle sera tangente en un seul point.

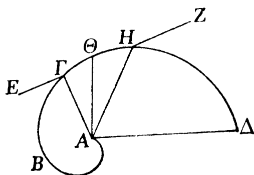


Fig. 11

Soit une spirale ABΓΔ ; soit le point A l'origine de la spirale et la droite AΔ l'origine de la révolution ;

1. Cf. prop. 1.

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ' ἀλλάλας. Δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ ΑΓ τᾶς ΑΒ καὶ ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως.

Ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς ΑΒ ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΓΑ τᾶς ΑΒ, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς ΑΓ ἐπὶ τὰν ΑΔ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ. Ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς ΑΒ ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀφικνεῖται καὶ ἀπὸ τᾶς ΑΓ ἐπὶ τὰν ΑΔ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΓΑ τᾶς ΑΒ, καὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ. Τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἅ τε ΑΓ τᾶς ΑΒ καὶ ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ, καὶ αἱ λοιπαί.

ιγ'.

Εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, καθ' ἓν μόνον ἐπιψαύσει σαμεῖον.

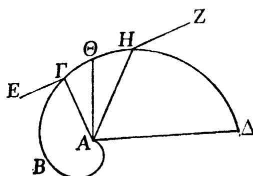


Fig. 11

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς τὰ Α, Β, Γ, Δ, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ Α σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ ΑΔ

7 τᾶς pr. G : τὰν CDEH ‖ 13 ΓΑ Heiberg : ΓΔ mss. BDEGH ag e corr. B.

soit ZE une tangente à la spirale. Je dis qu'elle n'y est tangente qu'en un seul point.

Qu'elle soit tangente, en effet, en deux points, Γ et H ; menons les droites AΓ et AH et bissectons l'angle compris entre AH et AΓ ; soit Θ le point de rencontre entre la bissectrice et la spirale. Dès lors, l'excédent de AH sur AΘ est égal à l'excédent de AΘ sur AΓ, puisque les angles HAΘ et ΘAΓ sont égaux[1]. Il s'ensuit que la somme des segments AH et AΓ est égale au double du segment AΘ. Mais cette somme est supérieure au double de la bissectrice (sc. AΘ de l'angle ΓAH) dans le triangle (sc. AΓH)[2]. Il est donc évident que le point où la droite AΘ rencontre ΓH est situé entre les points Θ et A ; la droite EZ coupe donc la spirale, puisqu'un des points de la droite ΓΘH est à l'intérieur de la spirale[3]. Mais on avait supposé cette droite tangente ; il s'ensuit que la droite EZ est tangente à la spirale en un seul point.

14.

Si deux droites menées du point d'origine d'une spirale à la (sc. partie de la) spirale décrite dans la première révolution sont prolongées jusqu'à la circonférence du premier cercle, les segments de droite menés à la spirale auront entre eux le même rapport que les arcs de cercle situés entre l'extrémité de la spirale et les extrémités des droites prolongées jusqu'à la circonférence, ces arcs étant pris vers l'avant à partir de l'extrémité de la spirale[4].

Soit ABΓΔEΘ une spirale décrite dans la première révolution ; soit A le point d'origine de la spirale,

1. Cf. prop. 12.

2. Archimède se réfère ici à une proposition qui ne figure pas explicitement chez Euclide ; sur ce théorème, cf. Sturm, *Des unvergl. Archimedis Kunstbücher*, Nuremberg, 1670, p. 403 ; Nizze, *A.'s vorh. Werke*, Stralsund 1824, p. 133 ; Heiberg dans *Zeitschrift für Math. und Phys.*, XXIV, p. 178.

3. Cf. Eucl. III, 16 coroll.

4. Cf. Pappus, IV, 32.

εὐθεῖα, καὶ ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖά τις ἁ ΖΕ. Φαμὶ δὴ καθ' ἓν μόνον σαμεῖον ἐπιψαύειν αὐτᾶς.

Ἐπιψαυέτω γάρ, εἰ δυνατόν, κατὰ δύο σαμεῖα τὰ Γ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΑΗ, καὶ ἁ γωνία δίχα τετμάσθω ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΑΓ, καθ' ὃ δὲ σαμεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ Θ. Τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἅ τε ΑΗ τᾶς ΑΘ καὶ ἁ ΑΘ τᾶς ΑΓ, ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχοντι ποτ' ἀλλάλας· ὥστε διπλάσιαί ἐντι αἱ ΑΗ, ΑΓ τᾶς ΑΘ. Ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ [τᾶς ΑΘ] δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· δῆλον οὖν ὅτι, καθ' ὃ συμπίπτει σαμεῖον τᾷ ΓΗ εὐθείᾳ ἁ ΑΘ, μεταξὺ τῶν Θ, Α ἐντὶ σαμείων· τέμνει ἄρα ἁ ΕΖ τὰν ἕλικα, ἐπειδή τι τῶν ἐν τᾷ ΓΘΗ σαμείων ἐντός ἐστι τᾶς ἕλικος. Ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα· καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ΕΖ τᾶς ἕλικος.

ιδ'.

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπεσέωντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τᾶς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομενᾶν τᾶν περιφερειᾶν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος.

Ἔστω ἕλιξ ἁ ΑΒΓΔΕΘ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ Α σαμεῖον, ἁ δὲ

10 τᾶς ΑΘ del. Heiberg ‖ μείζονές BG : μείζων DEH ‖ 11 συμπίπτει G : συμπίπτει τὸ CDEH ‖ 15 ΕΖ mss. BG : ΕΗ mss. CDEH ‖ 18 ἐκβληθέωντι DEGH : ἐκβληθέων C ‖ 21 ὃν BCG : ὧν DEH.

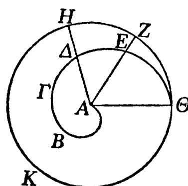


Fig. 12

la droite ΘA l'origine de la révolution, et ΘKH le premier cercle. Menons du point A à la spirale les segments de droite AE et AΔ et prolongeons-les jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle aux points Z et H. Il faut démontrer que le rapport de AE à AΔ est égal au rapport de l'arc ΘKZ à l'arc ΘKH.

Il est en effet évident que, pendant que la droite AΘ tourne, le point Θ se déplace sur la circonférence ΘKH avec une vitesse constante, et que le point A, qui se déplace sur la droite, parcourt le segment de droite AΘ, que, pendant que le point Θ décrit, dans son mouvement sur la circonférence du cercle, l'arc ΘKZ, le point A parcourt le segment de droite AE, et que, encore, le point A parcourt le segment de droite AΔ pendant que le point Θ parcourt l'arc ΘKH, chacun des deux points se déplaçant avec une vitesse constante. Il est donc évident que le rapport de AE à AΔ est égal au rapport de l'arc ΘKZ à l'arc ΘKH[1].

On démontrera de la même manière que si l'une des droites menées venait à tomber sur l'extrémité de la spirale, la proposition reste vraie.

1. Cf. prop. 2.

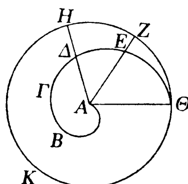


Fig. 12

ΘΑ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς ἔστω, καὶ κύκλος ὁ ΘΚΗ ἔστω ὁ πρῶτος, ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ Α σαμείου ποτὶ τὰν ἕλικα αἱ ΑΕ, ΑΔ καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η. Δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν.

Περιαγομένας γὰρ τᾶς ΑΘ γραμμᾶς δῆλον ὡς τὸ μὲν Θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερείας ἐνηνεγμένον ἐστὶν ἰσοταχέως, τὸ δὲ Α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν ΑΘ γραμμὰν πορεύεται, καὶ τὸ Θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον τὰν ΘΚΖ περιφέρειαν, τὸ δὲ Α τὰν ΑΕ εὐθεῖαν, καὶ πάλιν τό τε Α σαμεῖον τὰν ΑΔ γραμμὰν καὶ τὸ Θ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον· δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν [δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις].

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει.

4 τὰ DEGH : τὰς C ‖ 10 πορεύεται C : πεπορεύεται DEH πεπόρευται G ‖ 18 ἁ om. C ‖ 19 ὅτι add. Heiberg ‖ 19-20 τὸ αὐτὸ συμβαίνει om. B ‖ 20 συμβαίνει DEH : συμβαίνειν CG.

15.

Si des droites menées de l'origine de la spirale rencontrent la spirale décrite dans la seconde révolution, elles auront entre elles le même rapport que les arcs indiqués (sc. dans la proposition 14) augmentés (sc. chacun) de la circonférence entière du cercle.

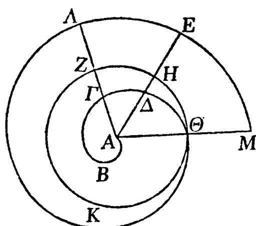


Fig. 13

Soit la spirale ΑΒΓΔΘ, où l'arc ΑΒΓΔΘ est décrit dans la première, l'arc ΘΛΕΜ dans la seconde révolution. Menons vers la spirale les droites ΑΕ et ΑΛ. Il faut démontrer que le rapport de ΑΛ à ΑΕ est égal au rapport de l'arc ΘΚΖ, augmenté de la circonférence entière du cercle, à l'arc ΘΚΗ augmenté de la circonférence entière du cercle.

Car le temps pendant lequel le point Α, en se déplaçant sur la droite, parcourt le segment ΑΛ, est égal au temps mis par le point Θ, dans son mouvement sur la circonférence du cercle, à parcourir la circonférence entière du cercle, augmentée de l'arc ΘΚΖ, et le point Α parcourt le segment de droite ΑΕ pendant que le point Θ parcourt la circonférence entière, augmentée de l'arc ΘΚΗ, chacun des deux points se déplaçant

ιε′.

Εἰ δέ κα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας.

Fig. 13

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔΘ, ἁ μὲν ΑΒΓΔΘ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ ΘΛΕΜ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ποτιπιπτόντων εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΛ. Δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΛ ποτὶ τὰν ΑΕ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ ΘΚΗ μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Ἐν ἴσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ Α σαμεῖον κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν ΑΛ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ Θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν καὶ ἔτι τὰν ΘΚΖ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ Α σαμεῖον τὰν ΑΕ εὐθεῖαν καὶ τὸ Θ ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν καὶ ἔτι τὰν ΘΚΗ, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερό-

2 δέ om. BC ‖ 7 ἁ pr. DEGH : αἱ C ‖ 9 ποτιπιπτόντων G : ποτιπίπτοντι CE ποτιπίπτωντι DH ‖ 13 ἴσῳ B : ὅσῳ CDEGH ‖ 18 καὶ τὸ Θ Torellius : κατὰ τὸ E codd.

avec une vitesse constante. Il est donc évident que le rapport du segment de droite AΛ au segment AE est égal au rapport de l'arc ΘKZ, augmenté de la circonférence entière du cercle, à l'arc ΘKH augmenté de la circonférence entière du cercle[1].

De la même manière on montrera que, aussi quand des droites sont menées vers la spirale décrite dans la troisième révolution (sc. les segments interceptés sur) elles auront entre elles (sc. eux) le même rapport que les arcs indiqués, augmentés, chacun, de la circonférence du cercle prise deux fois ; on montre encore de la même manière que les droites menées vers les autres spirales ont elles aussi le même rapport que les arcs indiqués, augmentés, chacun, de la circonférence entière du cercle, prise autant de fois qu'il y a de révolutions, moins une unité, et cela même si l'une des droites tombe sur l'extrémité de la spirale.

16.

Si une droite est tangente à une spirale décrite dans la première révolution, et si on mène une droite du point de contact au point qui est l'origine de la spirale, les angles que fait la tangente avec la droite menée seront inégaux, celui de l'avant[2] étant obtus, celui de l'arrière[2] étant aigu.

Soit ABΓΔΘ une spirale décrite dans la première révolution, A le point qui est l'origine de la spirale, AΘ la droite qui est l'origine de la révolution, et ΘKH le premier cercle ; soit EΔZ une tangente à la spirale au point Δ ; joignons Δ à A par la droite ΔA. Il faut démontrer que les droites ΔZ et AΔ font entre elles un angle obtus.

1. Cf. prop. 2.
2. Cf. définition 6.

μενον· δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΛ γραμμὰ ποτὶ τὰν ΑΕ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπεσέωντι εὐθεῖαι, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δείκνυνται ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαυτάκις λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἑνὶ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴ κα ἁ ποτιπίπτουσα ἁ ἑτέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.

ιϛ΄.

Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν, ἀνίσοι ἐσσοῦνται καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα.

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἔστω τὸ μὲν Α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΑΘ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ὅ τε πρῶτος κύκλος ὁ ΘΚΗ, ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἁ ΕΔΖ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθω ἁ ΔΑ. Δεικτέον ὅτι ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΑΔ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν.

7 ὅτι add. Nizzius ‖ 8 αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι BDEGH : ἁ εἰρημένα περιφέρεια C ‖ 11 αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι Torellius : ἁ εἰρημένα περιφέρεια codd. ‖ 12 τοσαυτάκις BG : τοσαύτας CDEH ‖ 13 ἑνὶ BG : ἐν CDEH ‖ 14 ἑτέρα Heiberg : ἑκατέρα codd. ‖ 26 ΕΔΖ Heiberg : ΔΕΖ codd.

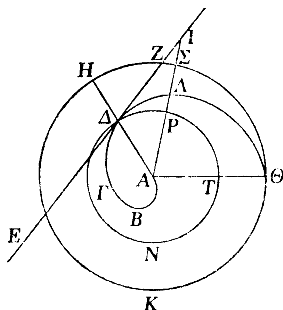


Fig. 14

Autour du point A comme centre et avec un rayon égal à AΔ décrivons le cercle ΔTN ; dès lors, l'arc de ce cercle du côté de l'avant tombe nécessairement à l'intérieur de la spirale, alors que l'arc du côté de l'arrière tombe à l'extérieur, parce que parmi les droites menées de A vers la spirale celles qui sont du côté de l'avant sont supérieures à AΔ, alors que celles qui sont du côté de l'arrière sont inférieures à AΔ. Il est donc évident que l'angle AΔZ n'est pas aigu, puisqu'il est supérieur à l'angle de la demi-circonférence[1] ; qu'il n'est pas, non plus, droit, il faut le démontrer de la manière que voici : qu'il soit, si possible, droit ; la droite EΔZ est, par conséquent, une tangente au cercle ΔTN[2]. Il est donc possible de mener du point A une droite vers la tangente de manière que le rapport du segment de droite, intercepté entre la tangente et la circonférence du cercle, au rayon du cercle soit inférieur au rapport de l'arc, compris entre le point de contact et la droite menée (sc. vers la tangente), à un arc de cercle donné. Menons donc la droite AI jusqu'à sa rencontre (sc. avec la tangente ΔZ) ; elle coupera la spirale au point Λ et la circonférence du cercle ΔNT au point P ; que, de plus, le rapport du

1. Cf. notes compl.
2. Cf. Eucl. III, 16, coroll.

Fig. 14

Γεγράφθω κύκλος ὁ ΔΤΝ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τᾷ ΑΔ· ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτὸς διὰ τὸ τᾶν ἀπὸ τοῦ Α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτουσᾶν εὐθειᾶν τὰς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μείζονας εἶμεν τᾶς ΑΔ, τὰς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. Ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΔΖ οὐκ ἔστιν ὀξεῖα δῆλον, ἐπειδὴ μείζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου, ὅτι δὲ ὀρθὰ οὐκ ἔστι δεικτέον οὕτως· ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ὀρθά· ἁ ἄρα ΕΔΖ ἐπιψαύει τοῦ ΔΤΝ κύκλου. Δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιϐαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς ποτιπιπτούσας περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. Ποτιπιπτέτω δὴ ἁ ΑΙ· τεμεῖ δὴ αὔτα τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ Λ, τὰν δὲ τοῦ ΔΝΤ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ρ· καὶ ἐχέτω

2 τᾷ C : τῷ DEGH ‖ τὰν GH : τὰ CDE ‖ 16 περιφέρεια Heiberg : periferiā B περιφερείας CDEGH ‖ ποτὶ BDEGH : ὅτι C ‖ 18 κύκλου περιφέρειαν Heiberg : περιφέρειαν κύκλου codd.

segment de droite ΡΙ au segment ΑΡ soit inférieur au rapport de l'arc de cercle ΔΡ à l'arc de cercle ΔΝΤ ; il s'ensuit que le rapport du segment entier ΙΑ au segment ΑΡ est inférieur au rapport de l'arc de cercle ΡΔΝΤ à l'arc de cercle ΔΝΤ, c'est-à-dire au rapport de l'arc de cercle ΣΗΚΘ à l'arc de cercle ΗΚΘ[1]. Or l'arc de cercle ΣΗΚΘ est à l'arc de cercle ΗΚΘ, comme le segment de droite ΑΛ est au segment ΑΔ ; car ceci a été démontré ; le rapport de ΑΙ à ΑΡ est donc inférieur au rapport de ΛΑ à ΑΔ, ce qui est impossible du moment que ΡΑ est égal à ΑΔ. Il s'ensuit que l'angle ΑΔΖ n'est pas droit. Mais on a montré qu'il n'est pas non plus aigu ; il est donc obtus et, par conséquent, l'angle restant est aigu.

On montrera de la même manière que la proposition est vraie aussi dans le cas où la tangente à la spirale est tangente en son extrémité.

17.

La proposition est vraie encore, si la droite est tangente à la spirale décrite dans la seconde révolution.

Fig. 15

1. On a en effet : $\frac{\text{arc } P\Delta NT}{\text{arc } \Delta NT} = \frac{\text{angle } PAT}{\text{angle } \Delta AT} = \frac{\text{arc } \Sigma HK\Theta}{\text{arc } HK\Theta}$; cf. Eucl. VI, 33.

ἁ ΡΙ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν· καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΡΔΝΤ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν, τουτέστιν ὃν ἔχει ἁ ΣΗΚΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΗΚΘ περιφέρειαν. Ὃν δὲ ἁ ΣΗΚΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΗΚΘ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΑΛ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΔ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΑΙ ποτὶ τὰν ΑΡ ἤπερ ἁ ΛΑ ποτὶ τὰν ΑΔ· ὅπερ ἀδύνατον· ἴσα γὰρ ἁ ΡΑ τᾷ ΑΔ. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὰ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΔΖ. Δέδεικται δὲ ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. Ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖά ἐστιν.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

ιζʹ.

Καὶ τοίνυν, εἴ κα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

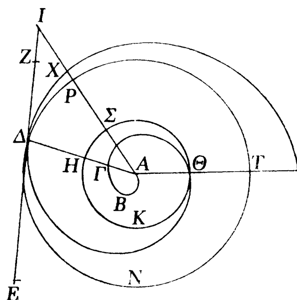


Fig. 15

5 ΗΚΘ mss. CD : ΚΘ mss. BEGH || 13 δὲ C : om. BD EGH || 14 ὅτι add. Heiberg.

Que la droite EZ soit tangente à la spirale, décrite dans la seconde révolution, au point Δ, les autres constructions étant les mêmes que les précédentes[1]. La partie de la circonférence du cercle PNΔ située du côté de l'avant tombera à l'intérieur de la spirale, tandis que la partie située du côté de l'arrière tombera à l'extérieur. L'angle AΔZ n'est donc pas droit, mais obtus. Qu'il soit en effet, si possible, droit ; dès lors, la droite EZ sera tangente au cercle PNΔ au point Δ[2]. Menons donc encore la droite AI vers la tangente ; que AI coupe la spirale au point X et la circonférence du cercle PNΔ au point P ; que le rapport du segment de droite PI au segment PA soit inférieur au rapport de l'arc de cercle ΔP à la circonférence entière du cercle ΔPN, augmentée de l'arc ΔNT ; car on a démontré que cela est possible[3] ; dès lors le rapport du segment de droite entier IA au segment AP est inférieur au rapport entre la somme de l'arc PΔNT et de la circonférence entière du cercle, d'une part, et, d'autre part, la somme de l'arc ΔNT et de la circonférence entière du cercle. Mais le rapport entre l'arc PΔNT, augmenté de la circonférence entière du cercle ΔNTP, et l'arc ΔNT, augmenté de la circonférence entière du cercle ΔNTP, est égal au rapport de l'arc de cercle ΣHKΘ, augmenté de la circonférence entière du cercle ΘΣHK, à l'arc de cercle HKΘ, augmenté de la circonférence entière du cercle ΘΣHK, et le rapport entre les arcs que nous venons d'indiquer en dernier lieu est égal au rapport du segment de droite XA au segment AΔ, comme cela a été démontré[4] ; il s'ensuit que le rapport du segment IA à AP est inférieur au rapport de AX à AΔ, ce qui est impossible du moment que PA est égal à AΔ, et IA supérieur à AX. Il est donc évident que l'angle AΔZ est obtus et que, par conséquent, l'angle restant est aigu.

1. Cf. prop. 16.
2. Cf. Eucl. III, 16, coroll.
3. Cf. prop. 5.
4. Cf. prop. 15.

Ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ ΕΖ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ Δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. Ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ΡΝΔ κύκλου περιφερείας τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός· ἁ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ τᾶν ΑΔΖ οὐκ ἔστιν ὀρθά, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ὀρθά· ἐπιψαύσει δὴ ἁ ΕΖ τοῦ ΡΝΔ κύκλου κατὰ τὸ Δ. Ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ ΑΙ καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ Χ, τὰν δὲ τοῦ ΡΝΔ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ρ, ἐχέτω δὲ ἁ ΡΙ ποτὶ ΡΑ ἐλάσσονα λόγον τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ ΔΡΝ κύκλου περιφέρειαν καὶ [ποτὶ] τὰν ΔΝΤ· δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν· καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΡΔΝΤ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. Ἀλλ' ὃν ἔχει λόγον ἁ ΡΔΝΤ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΔΝΤΡ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΔΝΤΡ κύκλου περιφερείας, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ ΣΗΚΘ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τᾶς ΘΣΗΚ ποτὶ τὰν ΗΚΘ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΘΣΗΚ κύκλου περιφερείας, ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ ὕστερον εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ ΧΑ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΔ εὐθεῖαν· δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἁ ΑΧ ποτὶ τὰν ΑΔ· ὅπερ ἀδύνατον [ἴση μὲν γὰρ ἡ ΡΑ τῇ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΙΑ τῆς ΑΧ]. Δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεῖά ἐστιν ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΔΖ· ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖά ἐστι.

1 ΕΖ mss. BC : ΑΖ mss. DEGH || περιφορᾷ BCG : περιφορᾶς DEH || 4 κύκλου περιφερείας Heiberg : περιφερείας κύκλου codd. || 9 ἁ DEGH : αἱ C || 13 ποτὶ del. Heiberg || 20 περιφέρεια CH : περιφέρειαν DEG.

La proposition reste vraie aussi dans le cas où la tangente à la spirale y est tangente en son extrémité.

On montrera de la même manière que, même dans le cas où une droite est tangente à une spirale décrite dans n'importe quelle révolution, et même si elle y est tangente en son extrémité, cette droite fera des angles inégaux avec la droite menée du point de contact à l'origine de la spirale, et que l'angle du côté de l'avant est obtus, tandis que l'angle du côté de l'arrière est aigu[1].

18.

Si une droite est tangente à une spirale, décrite dans la première révolution, à l'extrémité de la spirale, et si du point qui est l'origine de la spirale on élève la perpendiculaire sur l'origine de la révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et le segment de cette perpendiculaire compris entre la tangente et l'origine de la spirale sera égal à la circonférence du premier cercle.

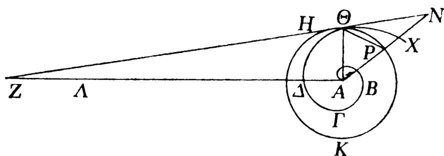


Fig. 16

Soit la spirale ΑΒΓΔΘ, le point Α son origine, la droite ΘΑ l'origine de la révolution, ΘΗΚ le premier cercle. Soit ΘΖ une tangente à la spirale au point Θ, et ΑΖ la perpendiculaire à ΘΑ élevée au point Α. Cette perpendiculaire rencontrera la droite ΘΖ du moment que les droites ΖΘ et ΘΑ comprennent entre

1. Cf. prop. 15.

Τὰ δ' αὐτὰ συμβήσεται, καὶ εἴ κα ἁ ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα, καὶ εἴ κα κατὰ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖαν.

ιη'.

Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ.

Fig. 16

Ἔστω ἕλιξ ἁ ΑΒΓΔΘ, ἔστω δὲ τὸ Α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΘΑ γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ὁ δὲ ΘΗΚ κύκλος ὁ πρῶτος, ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ Θ ἁ ΘΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΘΑ ἁ ΑΖ· συμπεσεῖται δὴ αὕτα ποτὶ τὰν ΘΖ, ἐπεὶ αἱ ΖΘ, ΘΑ ὀξεῖαν

4 περιφορᾷ B : om. CDEGH ‖ 5 κα om. C.

elles un angle aigu[1]. Soit Z le point de rencontre. Il faut démontrer que le segment de droite ZA est égal à la circonférence du cercle ΘKH.

En effet, s'il n'est pas égal, il est ou bien plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord, si possible, plus grand. Nous avons donc pris un segment de droite ΛA inférieur à ZA, mais supérieur à la circonférence du cercle ΘHK[2]. On a donc un cercle ΘHK et, dans ce cercle, un segment de droite ΘH inférieur au diamètre[3] ; de plus, le rapport de ΘA à AΛ est supérieur au rapport de la moitié de HΘ à la perpendiculaire abaissée du point A sur HΘ, puisqu'il est aussi supérieur au rapport de ΘA à AZ[4]. Il est donc possible de mener du point A au prolongement de ZΘ une droite AN telle que le rapport du segment de droite NP, compris entre la circonférence du cercle et le prolongement de ZΘ, à ΘP soit égal au rapport de ΘA à AΛ[5]. Il s'ensuit que NP sera à PA comme ΘP est à AΛ[6]. Mais le rapport de ΘP à AΛ est inférieur au rapport de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK ; car le segment de droite ΘP est inférieur à l'arc ΘP, et le segment de droite AΛ est supérieur à la circonférence du cercle ΘHK. Par conséquent, le rapport de NP à PA sera aussi inférieur au rapport de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK. Le rapport du segment de droite entier NA au segment de droite AP est donc inférieur au rapport de la somme de l'arc ΘP et de la circonférence entière du cercle à la circonférence du cercle ΘHK. Mais le rapport de la somme de l'arc ΘP et de la circonférence entière du cercle ΘHK à la circonférence du cercle ΘHK est égal au rapport de XA à AΘ ; car cela a été démontré[7] ; le rapport de NA à AP est donc inférieur au rapport de XA à AΘ, ce qui est impossible, puisque NA est supérieur à AX et que AP est égal à ΘA. Par conséquent, ZA n'est pas supérieur à la circonférence du cercle ΘHK.

1. Cf. prop. 16 ; Eucl. I, post. 5.
2. Cf. prop. 4.
3-7. Cf. notes compl.

γωνίαν περιέχοντι. Συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ. Δεικτέον ὅτι ἁ ΖΑ ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερείᾳ.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. Ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν ΛΑ τᾶς μὲν ΖΑ εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας μείζονα. Ἔστιν δὴ κύκλος τις ὁ ΘΗΚ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΘΗ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ ΑΛ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΗΘ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν, διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ ΑΖ · δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν ΑΝ, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ΝΡ ποτὶ ΘΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΛ · ἕξει οὖν ἁ ΝΡ ποτὶ τὰν ΡΑ λόγον, ὃν ἁ ΘΡ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΛ. Ἁ δὲ ΘΡ ποτὶ τὰν ΑΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν · ἁ μὲν γὰρ ΘΡ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΘΡ περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ εὐθεῖα τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας μείζων · ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ΝΡ ποτὶ ΡΑ ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν · καὶ ὅλα οὖν ἁ ΝΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΘΡ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΘΡ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΘ · δέδεικται γὰρ τοῦτο · ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΝΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἤπερ ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΘ · ὅπερ ἀδύνατον · ἁ μὲν γὰρ ΝΑ μείζων ἐστὶ τᾶς ΑΧ, ἁ δὲ ΑΡ ἴσα ἐστὶ τᾷ ΘΑ. Οὐκ ἄρα μείζων ἁ ΖΑ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ ΘΗΚ.

16 ΘΗΚ ms. C : ΘΗ mss. BDEGH ‖ 26 τὰν CG : τὸν DEH ‖ 27 ἄρα B : om. CDEGH.

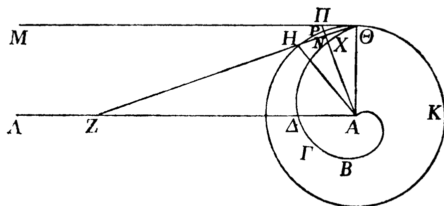


Fig. 17

Que le segment de droite ZA soit maintenant, si possible, inférieur à la circonférence du cercle ΘHK. Nous avons donc pris, cette fois, un segment de droite AΛ supérieur à AZ, mais inférieur à la circonférence du cercle ΘHK[1]. Menons par le point Θ la parallèle ΘM à AZ. Nous avons donc de nouveau le cercle ΘHK et dans ce cercle un segment de droite ΘH inférieur au diamètre et une autre droite, tangente au cercle au point Θ[2] ; le rapport de AΘ à AΛ est inférieur au rapport de la moitié de HΘ à la perpendiculaire abaissée du point A sur HΘ, puisqu'il est aussi inférieur au rapport de ΘA à AZ. Il est donc possible de mener, du point A à la tangente, un segment de droite AΠ tel que le rapport du segment de droite PN, compris entre la corde du cercle et la circonférence, au segment de droite ΘΠ, découpé sur la tangente (sc. menée au premier cercle en Θ), soit égal au rapport de ΘA à AΛ[3] ; la droite AΠ coupera donc le cercle en P et la spirale en X, et, par permutation[4], le rapport de NP à PA sera égal au rapport de ΘΠ à AΛ. Mais le rapport de ΘΠ à AΛ est supérieur au rapport de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK ; car le segment de droite ΘΠ est supérieur à l'arc ΘP, et le segment de droite AΛ est inférieur à la circonférence du cercle ΘHK. Il s'ensuit que le rapport de ΠP à AP est supérieur au rapport de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK, de façon que le rapport de

1-4. Cf. notes compl.

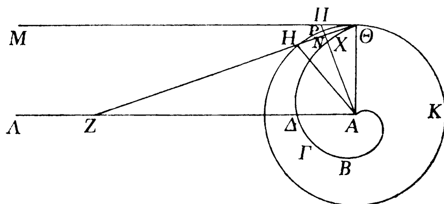


Fig. 17

Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἁ ΖΑ τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας. Ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν πάλιν τὰν ΑΛ τᾶς μὲν ΑΖ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα, καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ Θ τὰν ΘΜ παράλληλον τᾷ ΑΖ. Πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ ΘΗΚ καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ ΘΗ καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Θ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ ΑΘ ποτὶ τὰν ΑΛ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΗΘ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν, ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ ΑΖ ἐλάσσων ἐστί· δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν τὰν ΑΠ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν ΡΝ τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν ΘΠ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· τεμεῖ δὴ ἁ ΑΠ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ Χ· καὶ ἕξει καὶ ἐναλλαξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ΝΡ ποτὶ ΡΑ, ὃν ἁ ΘΠ ποτὶ ΑΛ. Ἁ δὲ ΘΠ ποτὶ τὰν ΑΛ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ἁ μὲν γὰρ ΘΠ εὐθεῖα μείζων ἐστὶν τᾶς ΘΡ περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ ἐλάσσων τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΠΡ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ

13 τὰν alt. C : om. DEGH.

PA à AN est supérieur au rapport de la circonférence du cercle ΘHK à l'arc ΘKP. Mais le rapport de la circonférence du cercle ΘHK à l'arc ΘKP est égal au rapport du segment de droite ΘA à AX, comme cela a été démontré[1]. Le rapport de PA à AN est donc supérieur au rapport de ΘA à AX, ce qui est impossible[2]. Le segment de droite ZA n'est donc ni supérieur ni inférieur à la circonférence du cercle ΘHK. Il lui est donc égal.

19.

Si une droite est tangente à une spirale décrite dans la deuxième révolution en son extrémité, et qu'on élève la perpendiculaire sur la droite, origine de la révolution, au point origine de la spirale, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et le segment de droite compris entre la tangente et l'origine de la spirale est égal au double de la circonférence du deuxième cercle.

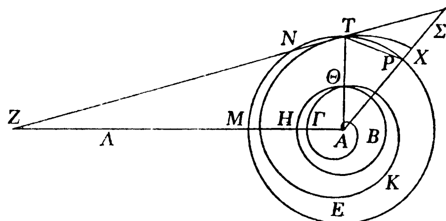


Fig. 18

Soit ABΓΘ une spirale décrite dans la première révolution, ΘET la spirale décrite dans la seconde révolution ; soit ΘKH le premier cercle, TMN le deuxième cercle ; soit TZ une tangente à la spirale

1. Cf. prop. 14.
2. Parce que PA = ΘA et AN > AX ; cf. Eucl. V, 8.

κύκλου περιφέρειαν· ὥστε καὶ ἁ ΡΑ ποτὶ τὰν ΑΝ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΡ περιφέρειαν. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΡ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΘΑ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΧ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΡΑ ποτὶ τὰν ΑΝ ἢ ἁ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΧ· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ΖΑ τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας· ἴσα ἄρα.

ιθ′.

Εἰ δέ κα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὕτα ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας.

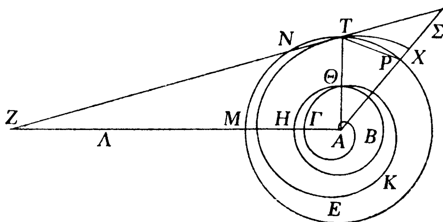


Fig. 18

Ἔστω γὰρ ἁ μὲν ΑΒΓΘ ἕλιξ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ ΘΕΤ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ὁ μὲν ΘΚΗ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ ΤΜΝ ὁ δεύτερος, ἔστω δέ τις

2 ἢ ἁ BDEGH : ἡ C ‖ 3 ΘΗΚ mss. BCG : ΘΝΚ mss. DEH ‖ 4 τοῦτον BDEGH : ταὐτὸν C ‖ 10 κα Heiberg : κατὰ DEGH καὶ C om. B ‖ 14 ἀρχᾶς BC : ἀρχᾶς καὶ DEGH.

au point Θ ; menons la perpendiculaire ZA à TA ; cette perpendiculaire rencontrera la droite TZ du moment que, comme on l'a démontré[1], l'angle ATZ est aigu. Il faut démontrer que le segment de droite ZA est égal au double de la circonférence du cercle TMN.

Si, en effet, le segment ZA n'est pas le double (sc. de la circonférence TMN), il est ou bien supérieur ou bien inférieur au double. Qu'il soit d'abord, si possible, supérieur au double ; donnons-nous un segment de droite ΛA qui soit inférieur au segment de droite ZA et supérieur au double de la circonférence du cercle TMN[2]. Sont donc donnés un cercle TMN et dans le cercle une corde TN inférieure au diamètre, et le rapport de TA à AΛ est supérieur au rapport de la moitié de TN à la perpendiculaire abaissée de A sur TN ; il est dès lors possible de mener de A un segment de droite AΣ vers le prolongement de TN, de manière que le rapport du segment PΣ, compris entre la circonférence et le prolongement de TN, au segment TP soit égal au rapport du segment TA à AΛ ; la droite AΣ coupera donc le cercle en P et la spirale en X, et, par permutation[3], le rapport de PΣ à TA sera égal au rapport de TP à AΛ. Mais le rapport de TP à AΛ est inférieur au rapport de l'arc de cercle TP au double de la circonférence du cercle TMN, du moment que le segment de droite TP est inférieur à l'arc de cercle TP et que le segment de droite AΛ est supérieur au double de la circonférencedu cercle TMN ; il s'ensuit que le rapport du segment PΣ à AP[4] est inférieur au rapport de l'arc TP au double de la circonférence du cercle TMN ; par conséquent, le rapport du segment entier ΣA au segment AP est inférieur au rapport de la somme de l'arc de cercle TP et du double de la circonférence du cercle TMN au double de la circonférence du cercle TMN. Or le

1. Cf. prop. 17.
2. Cf. prop. 4.
3. Cf. Eucl. V, 16.
4. Parce que AP = AT.

γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ Θ ἁ ΤΖ, ἁ δὲ ΖΑ ποτ' ὀρθὰς ἄχθῳ τᾷ ΤΑ· συμπεσεῖται δὲ αὕτα τᾷ ΤΖ διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν ἐοῦσαν τὰν ὑπὸ τᾶν ΑΤΖ. Δεικτέον ὅτι ἁ ΖΑ εὐθεῖα διπλασία ἐντὶ τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων ἢ διπλασία, καὶ λελάφθω τις εὐθεῖα ἁ ΛΑ τᾶς μὲν ΖΑ εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία. Ἔστιν δή τις κύκλος ὁ ΤΜΝ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ δεδομένα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΤΝ, καὶ ὃν ἔχει ἁ ΤΑ ποτὶ τὰν ΑΛ μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΤΝ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν· δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιϐαλεῖν τὰν ΑΣ ποτὶ τὰν ΤΝ ἐκϐεϐλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκϐεϐλημένας τὰν ΡΣ ποτὶ τὰν ΤΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ ΤΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· τεμεῖ δὴ ἁ ΑΣ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ Χ· καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ΡΣ ποτὶ τὰν ΤΑ, ὃν ἁ ΤΡ ποτὶ τὰν ΑΛ. Ἁ δὲ ΤΡ ποτὶ τὰν ΑΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΤΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφέρειαν· ἔστιν γὰρ ἁ μὲν ΤΡ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς ΤΡ περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΡΣ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἁ ΤΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας· ὅλα οὖν ἁ ΣΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΤΡ περιφέρεια μετὰ τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας δὶς εἰρημένας ποτὶ τὰν τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφέρειαν

2 δὲ BCDEH : δὴ G ‖ αὕτα G : τᾷ αὐτᾷ CDEH ipsi B ‖ 11 γραμμὰ δεδομένα Heiberg : γραμμὰ G γεγραμμένα BCDEH ‖ 12 ἁ alt. DEH : λόγον ἁ G et proportio quam habet quae B ‖ 17 ἔχειν G : ἔχει CDEH ‖ 21 διπλασίαν CGH : διπλασία DE ‖ 22 TMN mss BG : MN mss. CDEH ‖ 24 τοῦ C : om. DEGH.

rapport entre les arcs de cercle que nous venons d'indiquer est égal au rapport du segment de droite XA au segment AT, comme cela a été démontré[1] ; il s'ensuit que le rapport du segment AΣ au segment AP est inférieur au rapport de XA à TA, ce qui est impossible[2]. Le segment de droite ZA n'est donc pas supérieur au double de la circonférence du cercle TMN. On montrera de la même manière qu'il n'est pas non plus inférieur ; il est donc évident qu'il est égal au double de cette circonférence.

On peut montrer par les mêmes procédés que, aussi dans le cas où une droite est tangente à une spirale, décrite dans n'importe quelle révolution, en l'extrémité de la spirale et où la perpendiculaire, élevée à l'origine de la spirale sur la droite, origine de la révolution, rencontre la tangente, elle (sc. le segment intercepté sur elle) est autant de fois multiple de la circonférence du cercle (sc. correspondant) que l'indique le nombre qui compte les révolutions.

20.

Si une droite est tangente à une spirale décrite dans la première révolution en un point autre que l'extrémité de la spirale, si du point de contact on mène une droite à l'origine de la spirale et qu'on décrit, autour de l'origine de la spirale comme centre et avec un rayon égal au segment ainsi mené, un cercle, si, enfin, on élève à l'origine de la spirale une perpendiculaire sur la droite menée du point de contact vers l'origine de la spirale, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et le segment compris entre le point de rencontre et l'origine de la spirale sera égal à l'arc du cercle décrit compris entre le point de contact et le point où le cercle décrit coupe la droite origine de la révolution, cet arc de cercle étant pris du côté de l'avant à partir du point situé sur la droite origine de la révolution.

1. Cf. prop. 15.
2. Parce que $A\Sigma > XA$ et $AP = TA$; cf. Eucl. V, 8.

δὶς εἰρημέναν. Ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΤ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΑΣ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΤΑ· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ΖΑ εὐθεῖα τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ διπλασία. Δῆλον οὖν ὅτι διπλασία ἐστίν.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον, καὶ εἴ κα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὅτι πολλαπλασία ἐστὶν τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.

κ'.

Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ ἐπιζευχθείσᾳ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθείσᾳ, συμπεσεῖται αὕτα ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾷ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾷ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ἃν τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σαμείου τοῦ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς.

6 ὅτι BDEGH : om. C ‖ 12 ὅτι add. Nizzius ‖ 21 τᾷ G : om. CDEH ‖ 24 συμπτώσιος Heiberg : συμπτώσιας CDEGH ‖ 25 τᾷ G : τᾶς CDEH ‖ 26 ἃν B : ὁ CDEGH.

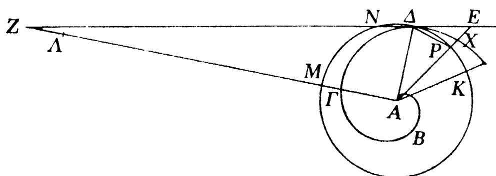


Fig. 19

Soit la spirale ΑΒΓΔ, décrite dans la première révolution, et soit EZ une tangente à la spirale au point Δ ; menons la droite AΔ joignant le point Δ à l'origine de la spirale, et autour de A comme centre et avec un rayon égal à AΔ décrivons le cercle ΔMN ; soit K le point d'intersection de ce cercle avec la droite origine de la révolution, et ZA la perpendiculaire sur AΔ en A. Que cette perpendiculaire rencontre (sc. la droite ZΔ), cela est évident[1] ; ce qu'il faut démontrer, c'est que le segment de droite ZA est égal à l'arc de cercle KMNΔ.

S'il ne lui est pas égal, en effet, il lui est ou bien supérieur ou bien inférieur. Qu'il lui soit d'abord, si possible, supérieur. Donnons-nous un segment de droite ΛA qui soit inférieur au segment ZA, mais supérieur à l'arc de cercle KMNΔ[2]. Nous avons donc encore un cercle KMN, et dans le cercle une corde ΔN inférieure au diamètre, et le rapport de ΔA à AΛ est supérieur au rapport de la moitié de la corde ΔN à la perpendiculaire abaissée du point A sur cette corde ; il est donc possible de mener de A vers le prolongement de NΔ la droite AE de manière que le rapport de EP à ΔP soit égal au rapport de ΔA à AΛ ; on a en effet démontré cette possibilité[3] ; le segment EP sera, par conséquent, à AP, comme ΔP est à AΛ[4]. Mais le rapport de ΔP à AΛ est inférieur au rapport de l'arc de cercle ΔP à l'arc de cercle KMΔ, puisque le segment de droite ΔP est inférieur à l'arc de cercle ΔP,

1-4. Cf. notes compl.

Fig. 19

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ ΕΖ κατὰ τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπεζεύχθω ἁ ΑΔ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΜΝ, τεμνέτω δ' οὗτος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ Κ, ἄχθω δὲ ἁ ΖΑ ποτὶ τὰν ΑΔ ὀρθά. Ὅτι μὲν οὖν αὗτα συμπίπτει δῆλον· ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ΖΑ εὐθεῖα τᾷ ΚΜΝΔ περιφερείᾳ δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. Ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον μείζων, λελάφθω δέ τις ἁ ΛΑ τᾶς μὲν ΖΑ εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ ΚΜΝΔ περιφερείας μείζων. Πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ ΚΜΝ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΔΝ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ ΔΑ ποτὶ ΑΛ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΔΝ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν· δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν τὰν ΑΕ ποτὶ τὰν ΝΔ ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν ΕΡ ποτὶ τὰν ΔΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν· ἕξει οὖν καὶ ἁ ΕΡ ποτὶ τὰν ΑΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΡ ποτὶ τὰν ΑΛ. Ἁ δὲ ΔΡ ποτὶ τὰν ΑΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν, ἐπεὶ ἁ μὲν ΔΡ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΔΡ

1 περιφορᾷ C : om. DEGH ‖ 2 ΕΖ ms. C : ΑΕΖ mss. DEGH, ΕΔΖ ms. B ‖ 5 οὗτος BC : οὕτω(ς) DEGH ‖ 20 ΔΡ alt. B : ΑΡ mss. CDEGH.

et que le segment de droite AΛ est supérieur à l'arc de cercle KMΔ ; il s'ensuit que le rapport du segment EP à PA est inférieur au rapport de l'arc de cercle ΔP à l'arc KMΔ, ce qui entraîne que le rapport de AE à AP est à son tour inférieur au rapport de l'arc de cercle KMP à l'arc KMΔ. Or le rapport de l'arc KMP à l'arc KMΔ est égal au rapport de XA à AΔ[1] ; le rapport de EA à AP est, par conséquent, inférieur au rapport de AX à ΔA, ce qui est impossible[2]. Le segment ZA n'est donc pas supérieur à l'arc de cercle KMΔ, et on démontrera comme précédemment qu'il ne lui est pas non plus inférieur ; il lui est donc égal.

Par les mêmes procédés on démontrera que, aussi dans le cas où une droite est tangente à une spirale décrite dans la seconde révolution en un point autre que l'extrémité de la spirale, mais où les autres constructions restent les mêmes, le segment de droite compris entre le point de rencontre avec la tangente et l'origine de la spirale est égal à la somme de la circonférence entière du cercle décrit et de l'arc compris entre les points indiqués[3], cet arc étant pris de la même manière. De plus, si une droite est tangente à une spirale décrite dans n'importe quelle révolution en un point autre que l'extrémité de la spirale, les autres constructions restant les mêmes, le segment de droite compris entre les points indiqués est un multiple de la circonférence du cercle décrit d'après le nombre qui compte à une unité près les révolutions, augmenté de l'arc de cercle compris entre les points indiqués et pris de la même manière[4].

1. Cf. prop. 14.
2. Puisque AP = ΔA et EA > AX ; cf. Eucl. V, 8.
3. Cf. l'énoncé de la prop. 20.
4. Cf. prop. 15 et 17.

περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ μείζων τᾶς ΚΜΔ περιφερείας· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ἁ ΕΡ εὐθεῖα ποτὶ ΡΑ ἢ ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν· ὥστε καὶ ἁ ΑΕ ποτὶ ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΚΜΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΚΜΡ ποτὶ τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΧΑ ποτὶ ΑΔ· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΕΑ ποτὶ ΑΡ ἢ ἁ ΑΧ ποτὶ ΔΑ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα μείζων ἁ ΖΑ τᾶς ΚΜΔ περιφερείας. Ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν· ἴσα ἄρα.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ εἴ κα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐστὶν ὅλᾳ τᾷ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ καὶ ἔτι τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων, ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας· καὶ εἴ κα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας κατὰ τὸν ἑνὶ ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένᾳ.

5 τὰν add. Heiberg ‖ 7 ἁ alt. C : om. DEGH ‖ 14 κατασκευασθέωντι Torellius : κατασκευασθέντι codd. ‖ 15 συμπτώσιος Heiberg : συμπίπτουσα CDEGH concidentis B ‖ τᾶς ἀρχᾶς CDEGH : principium B ‖ 19 περιφορᾷ B : περιφορᾶς CDEGH ‖ 23 ἑνὶ C : om. BDEGH ‖ 25 λαμβανομένᾳ Heiberg : λαμβανομένας CDEGH accepta periferia B.

21.

Si on se donne l'aire comprise entre une spirale décrite dans la première révolution et la première droite à l'origine de la révolution, il est possible de lui circonscrire une figure plane et de lui en inscrire une autre, les deux figures étant composées de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à toute aire donnée.

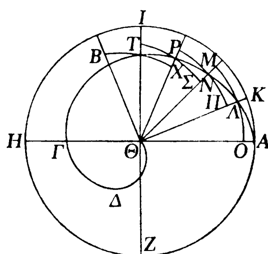


Fig. 20

Soit ΑΒΓΔ une spirale décrite dans la première révolution, Θ l'origine de la spirale, la droite ΘΑ l'origine de la révolution, ΖΗΙΑ le premier cercle, ΑΗ et ΖΙ deux diamètres de ce cercle perpendiculaires l'un à l'autre. Si on divise maintenant continuellement l'angle droit et le secteur comprenant l'angle droit en deux parties égales, ce qui restera du secteur sera inférieur à toute aire donnée[1]. Soit ΑΘΚ le secteur devenu inférieur à l'aire donnée. Divisons alors les quatre angles droits en angles égaux à l'angle compris

1. Cf. Eucl. X, 1.

κα'.

Λαμβάνοντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Fig. 20

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ Θ σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ ΘΑ, ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ΖΗΙΑ, αἱ δὲ ΑΗ, ΖΙ διάμετροι αὐτοῦ ποτ' ὀρθὰς ἀλλάλαις. Αεὶ δὴ τᾶς ὀρθᾶς γωνίας δίχα τεμνομένας καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος· καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ ΑΘΚ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. Διαιρήσθωσαν δὴ αἱ γωνίαι αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τᾷ περιεχομένᾳ ὑπὸ τᾶν ΑΘ,

12 ἀλλάλαις DE : ἀλλήλαις GH || 17 δὴ αἱ G : δὴ οὖν DEH itaque B || 18 τᾷ περιεχομένᾳ Torellius : τᾶς περιεχομένας codd.

entre AΘ et ΘK et prolongeons les droites formant ces angles jusqu'à la spirale. Soit Λ le point d'intersection de la droite ΘK et de la spirale ; autour de Θ comme centre décrivons un cercle de rayon ΘΛ. La partie de la circonférence de ce cercle située du côté de l'avant tombera à l'intérieur de la spirale, la partie située du côté de l'arrière tombera à l'extérieur. Décrivons donc la circonférence jusqu'à sa rencontre avec la droite ΘA et avec la droite qui tombe sur la spirale au-delà de la droite ΘK. Soit de nouveau N le point d'intersection de la droite ΘM et de la spirale. Autour de Θ comme centre et avec un rayon égal à ΘN décrivons un cercle jusqu'à la rencontre de sa circonférence avec la droite ΘK et avec la droite qui tombe sur la spirale au-delà de ΘM. Décrivons de même, autour de Θ comme centre, des circonférences passant par tous les autres points d'intersection de la spirale avec les droites faisant entre elles les angles égaux, jusqu'à la rencontre de chaque circonférence avec les droites de l'avant et de l'arrière. On aura ainsi une certaine figure circonscrite à l'aire qu'on s'est donnée, et une autre figure qui y est inscrite, les deux figures étant composées de secteurs semblables. Nous allons démontrer que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur (sc. peut être rendu inférieur) à toute aire donnée.

Le secteur ΘΛO est en effet égal au secteur ΘMΛ, le secteur ΘNΠ égal au secteur ΘNP, le secteur ΘXΣ au secteur ΘXT, et chacun des autres secteurs dans la figure inscrite est égal à celui des secteurs dans la figure circonscrite qui a un côté commun (sc. avec lui). Il est donc évident que la somme des secteurs sera égale à la somme des secteurs. Par conséquent,

ΘΚ, καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἔστε ποτὶ τὰν ἕλικα ἄχθωσαν. Καθ' ὃ δὴ τέμνει σαμεῖον ἁ ΘΚ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ Λ, καὶ κέντρῳ τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΛ κύκλος γεγράφθω· πεσεῖται δὲ αὐτοῦ ἁ μὲν εἰς τὰ προαγούμενα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. Γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, ἔστε κα συμπέσῃ τᾷ ΘΑ [κατὰ τὸ Ο ἁ ΟΜ] καὶ τᾷ μετὰ τὰν ΘΚ εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσᾳ. Πάλιν δὴ καὶ καθ' ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σαμεῖον ἁ ΘΜ, ἔστω τὸ Ν, καὶ κέντρῳ τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΝ κύκλος γεγράφθω, ἔστε κα συμπέσῃ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου τᾷ ΘΚ καὶ τᾷ μετὰ τὰν ΘΜ ποτιπιπτούσᾳ ποτὶ τὰν ἕλικα, ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι, κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ Θ, ἔστ' ἂν συμπέσῃ ἑκάστα ἁ περιφέρεια τᾷ τε προαγουμένᾳ εὐθείᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ· ἐσσεῖται δή τι περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγεραμμένον. Ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου δειχθήσεται. Ἔστιν γὰρ ὁ μὲν ΘΛΟ τομεὺς ἴσος τῷ ΘΜΛ, ὁ δὲ ΘΝΠ τῷ ΘΝΡ, ὁ δὲ ΘΧΣ τῷ ΘΧΤ, ἔστιν δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. Δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ τομέες πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται·

1 ἔστε ποτὶ Heiberg : ἐς τὴν κατὰ DEGH equales per B || 2 ἄχθωσαν G : ἀχθῶσιν DEH || 4 δὲ C : δι' DEH δὴ BG || προαγούμενα Heiberg : προαγόμενα DEH προαγεύμενα CG || 5 περιφέρεια BCG : περιφέρειαι DEH || 6 ἔστε κα Heiberg : ἔσται κἂν CDEH ἔστ' ἂν G et B || 7 κατὰ τὸ Ο ἁ ΟΜ codd. : del. Heiberg || 7-8 τὰν ἕλικα BDEGH : om. C || 10 ΘΝ mss. BCDG : ΘΗ ms. E, ΘΚΗ ms. H || ἔστε κα Heiberg : ἔσται καὶ CDEH ἔστ' ἂν G et B || 11 τᾷ ΘΚ ms. G : om. BCDEH || 13 ἃ DEGH : ἂν C || 15 ἑκάστα B : ἑκάστας CDEH ἑκάστου G || προαγουμένᾳ Heiberg : προαγομένᾳ DEH προαγευμένᾳ CG || 19 μεῖζόν DEGH : μείζων C || 20 προτεθέντος DEGH : προτεθὲν C.

la figure inscrite dans l'aire est équivalente à la figure circonscrite à l'aire, au secteur ΘAK près, qui est le seul, en effet, des secteurs de la figure circonscrite qui n'ait pas été pris (sc. dans la comparaison avec les secteurs de la figure inscrite). Il est donc évident que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est le secteur AKΘ, qui est inférieur à une aire donnée[1].

Corollaire

Il est évident, d'après ce que nous venons de voir, qu'il est possible de circonscrire à l'aire indiquée une figure telle que l'excès de la figure circonscrite sur cette aire soit inférieur à toute aire donnée, et, réciproquement, de lui inscrire une figure telle que l'excès de l'aire sur la figure inscrite soit inférieur à toute aire donnée.

22.

Si on se donne l'aire comprise entre une spirale décrite dans la seconde révolution et la deuxième droite à l'origine de la révolution, il est possible de lui circonscrire une figure plane et de lui en inscrire une autre (sc. les deux) composées de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à toute aire donnée.

Soit ΑΒΓΔΕ une spirale décrite dans la seconde révolution, le point Θ l'origine de la spirale, la droite AΘ l'origine de la révolution, EA la seconde droite à l'origine de la révolution, AZH le deuxième cercle, et AΓH et ZI deux diamètres de ce cercle perpendi-

1. C'est-à-dire qui peut être rendu inférieur, par une subdivision prolongée des angles, à toute aire donnée.

ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι χωρὶς τοῦ ΘΑΚ τομέως· μόνος γὰρ οὗτος οὐ λέλαπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ ΑΚΘ τομεῖ, ὅς ἐλάσσων ἐστὶν τοῦ προτεθέντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὲ φανερὸν ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κβ'.

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστι δευτέρα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ᾇ ἁ ΑΒΓΔΕ, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἔστω τὸ μὲν Θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΑΘ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ἁ δὲ ΕΑ ἁ δευτέρα εὐθεῖα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ὁ δὲ ΑΖΗ κύκλος ἔστω δεύτερος καὶ αἱ ΑΓΗ, ΖΙ διάμετροι αὐτοῦ ποτ' ὀρθὰς

3 οὐ add. Nizzius || λέλαπται BCDEH : λέλειπται G || 10 ἐλάσσονι BG : ἔλασσον εἶμεν DEH || 15 ὑπὸ CDEH : ὑπό τε G.

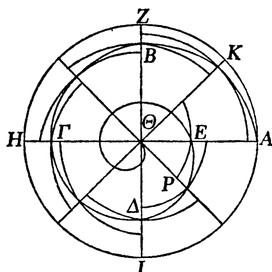


Fig. 21

culaires l'un à l'autre. Si maintenant l'angle droit et le secteur comprenant l'angle droit sont divisés (sc. continuellement) en deux parties égales, ce qui restera sera inférieur à l'aire donnée[1] ; soit ΘKA un secteur inférieur à l'aire donnée ; dès lors, si les angles droits sont divisés en angles égaux à l'angle KΘA, les autres constructions étant les mêmes que les précédentes, l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite sera inférieur au secteur ΘKA, puisque cet excès sera égal à l'excédent du secteur ΘKA sur le secteur ΘEP.

Corollaire

Il est donc évident qu'il est possible aussi que la figure circonscrite dépasse l'aire qu'on s'est donnée d'une aire inférieure à toute aire proposée et que l'aire qu'on s'est donnée dépasse à son tour la figure inscrite d'une aire inférieure à toute aire donnée.

Le même raisonnement rend claire aussi la proposition que voici : si on se donne l'aire comprise entre une spirale décrite dans n'importe quelle révolution

1. Cf. Eucl. X, 1.

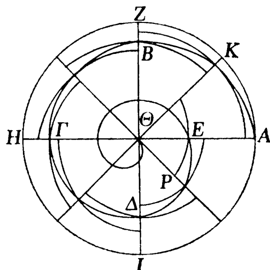


Fig. 21

ἀλλάλαις. Πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος· καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ ΘΚΑ τομεὺς ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. Διαιρεθεισᾶν δὴ τᾶν ὀρθᾶν γωνιᾶν εἰς τὰς ἴσας γωνίας τᾷ ὑπὸ τᾶν ΚΘΑ καὶ τῶν ἄλλων κατεσκευασθέντων κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι ἢ ὁ τομεὺς ὁ ΘΚΑ· μεῖζον γὰρ ἐσσεῖται τᾷ ὑπεροχᾷ, ᾇ ὑπερέχει ὁ ΘΚΑ τομεὺς τοῦ ΘΕΡ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστιν καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερὸν διότι δυνατὸν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος

8 μεῖζον DEGH : μείζων C ‖ 9 μεῖζον Torellius : μείζων codd. ‖ τᾷ ὑπεροχᾷ B : ἁ ὑπεροχά CDEGH ‖ 13 μεῖζον DEGH : μείζων C.

et la droite à l'origine de la révolution désignée par le nombre des révolutions, il est possible de lui circonscrire une figure plane telle qu'elle a été indiquée, de manière que la figure circonscrite dépasse l'aire qu'on s'est donnée d'une aire inférieure à toute aire proposée, et d'y inscrire une autre figure, de manière que l'aire qu'on s'est donnée dépasse la figure inscrite d'une aire inférieure à toute aire proposée.

23.

Si on se donne l'aire comprise entre une spirale, inférieure à la spirale décrite dans une révolution, et n'ayant pas d'extrémité à l'origine de la spirale, d'une part, et, d'autre part, les droites menées des extrémités de la spirale (sc. à l'origine de la spirale), il est possible de circonscrire à cette aire une figure plane et d'y inscrire une autre, les deux figures composées de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite dépasse la figure inscrite d'une aire inférieure à toute aire proposée.

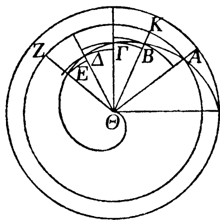


Fig. 22

Soit la spirale ΑΒΓΔΕ, les points Α et Ε ses extrémités, Θ son origine ; menons les droites ΑΘ et ΘΕ.

τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται, ἐπίπεδον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κγʹ.

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομενᾶν δυνατόν ἐστι περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

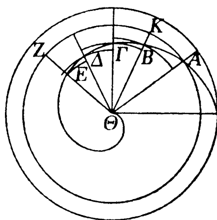


Fig. 22

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔΕ, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ Α, Ε, ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ,

4 ὥστε BG : ἔστω CDEH ‖ 16 μεῖζον εἶμεν BDEGH : μείζονι μὲν C.

Autour de Θ comme centre et avec un rayon égal à ΘA décrivons un cercle, et soit Z son point de rencontre avec la droite ΘE. Si on divise maintenant continuellement l'angle de sommet Θ et le secteur ΘAZ en deux parties égales, l'aire qui reste finira par être inférieure à l'aire proposée. Soit ΘAK un secteur inférieur à l'aire proposée. Décrivons, comme dans les démonstrations antérieures, des cercles passant par les points d'intersection de la spirale et des droites faisant les angles égaux de sommet Θ, de manière que chaque arc de cercle rencontre la droite à l'avant et la droite à l'arrière ; on aura donc une figure plane circonscrite à l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕ et les droites AΘ et ΘE, et une autre figure qui y est inscrite, les deux figures étant composées de secteurs semblables, et l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur à l'aire proposée, puisque le secteur ΘAK est inférieur à cette aire.

Corollaire

Il est clair, d'après ce qui précède, qu'il est possible de circonscrire à l'aire indiquée une figure plane telle qu'elle vient d'être décrite, de manière que la figure circonscrite dépasse l'aire indiquée d'une aire inférieure à toute aire proposée, et d'y inscrire une autre figure plane, de manière que l'aire indiquée dépasse la figure inscrite d'une aire inférieure à toute aire proposée[1].

24.

L'aire comprise entre la spirale décrite dans la première révolution et la première droite origine de

1. Cf. prop. 21, coroll.

ΘΕ. Γεγράφθω δὴ κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΑ, καὶ συμπιπτέτω τᾷ ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. Ἀεὶ δὲ τᾶς γωνίας τᾶς ποτὶ τῷ Θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ ΘΑΖ δίχα τεμνομένων ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. Ἔστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ ΘΑΚ τοῦ προτεθέντος. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τῷ Θ, ὥστε τᾶν περιφερειᾶν ἑκάσταν συμπίπτειν τᾷ τε προαγουμένᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ· ἐσσεῖται δή τι περὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον, καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου· ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ ΘΑΚ τομεύς.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν ὅτι δυνατόν ἐστιν περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κδ'.

Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας

2 Z. ἀεὶ BDEGH : ZA. εἰ C ‖ 3 τῷ Heiberg : τὸ codd. ‖ 5 ἔλασσον DEGH : ἐλάσσων C ‖ 8 τῷ G : τᾷ CDEH ‖ ἑκάσταν Torellius : ἑκάστα CDEH ἑκάστας G ‖ 10 περὶ add. Torellius ‖ 14 ἐλάσσων CH : ἔλασσον DEG ‖ 18 σχῆμα add. Heiberg ‖ 20 καὶ — 23 χωρίου add. Rivaltus.

la révolution est équivalente à la troisième partie du premier cercle[1].

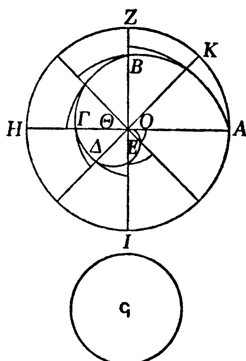


Fig. 23

Soit ΑΒΓΔΕΘ une spirale décrite dans la première révolution, le point Θ l'origine de la spirale, ΘΑ la première droite origine de la révolution, et ΑΚΖΗΙ le premier cercle. Soit ϛ un cercle équivalent au tiers du premier cercle. Il faut démontrer que l'aire indiquée est équivalente au cercle ϛ.

En effet, si elle ne lui est pas équivalente, elle est ou bien supérieure ou bien inférieure à ce cercle. Qu'elle soit d'abord, si possible, inférieure. Il est donc possible de circonscrire à l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕΘ et la droite ΑΘ une figure plane, composée de secteurs semblables, telle que l'excès de la figure circonscrite sur cette aire soit inférieur à l'excès du cercle ϛ sur l'aire indiquée[2]. Que cette figure soit donc circonscrite ; soit ΘΑΚ le plus grand des secteurs dont la figure indiquée est composée, ΘΕΟ le plus petit de ces secteurs.

1. Cf. un autre énoncé de cette proposition dans la lettre à Dosithée qui introduit ce traité, p. 11. Cette proposition est énoncée et démontrée aussi par Pappus, IV, 33.

2. Cf. prop. 21, coroll.

τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου.

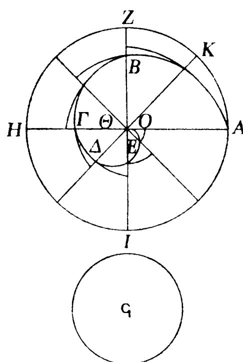


Fig. 23

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔΕΘ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἔστω δὲ τὸ μὲν Θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΘΑ εὐθεῖα πρώτα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ὁ δὲ ΑΚΖΗΙ κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ὁ ἐν ᾧ ϛ κύκλος. Δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ ϛ κύκλῳ.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Δυνατὸν δή ἐστιν περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ὁ ϛ κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. Περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΕΟ· δῆλον οὖν

5 τᾶν add. Heiberg ‖ 6 ΑΚΖΗΙ mss. BDEG : ΑΝΖΗΙ mss. CH ‖ ὁ alt. add. Heiberg ‖ 13 συγκείμενον add. Torellius.

Il est donc évident que la figure circonscrite est inférieure au cercle ϛ. Prolongeons les droites comprenant les angles égaux de sommet Θ jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. Il y a ainsi certains segments de droite, joignant le point Θ à la spirale, qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur et dont le plus grand est ΘA, le plus petit ΘE, ce dernier étant égal à leur différence (sc. à la différence entre deux segments consécutifs)[1]. Mais il y a aussi d'autres segments de droite, joignant le point Θ à la circonférence du cercle, au même nombre que ceux que nous venons de dire, mais ayant chacun la même longueur que le plus grand de ceux-ci ; sur tous sont construits des secteurs semblables, aussi bien sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur que sur ceux qui sont égaux entre eux et au plus grand (sc. des segments de droite inégaux). La somme des secteurs construits sur les segments égaux au segment le plus grand est donc inférieure au triple de la somme des secteurs construits sur les segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur ; car cette propriété a été démontrée[2]. Mais la somme des secteurs construits sur les segments de droite égaux entre eux et égaux au plus grand est égale au cercle AZHI, alors que la somme des secteurs construits sur les segments de droite se dépassant les uns les autres d'une même grandeur est égale à la figure circonscrite. Mais ce cercle est le triple[3] du cercle ϛ. Le cercle ϛ est donc inférieur à la figure circonscrite. Or il n'est pas inférieur, mais supérieur à cette figure. Par conséquent, l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕΘ et la droite ΑΘ n'est pas inférieure au cercle ϛ.

Mais elle n'est pas non plus supérieure à ce cercle. Qu'elle le soit, si possible. Il est donc de nouveau possible d'inscrire dans l'aire comprise entre la spirale

1. Cf. prop. 12.
2. Cf. prop. 10, coroll.
3. Par hypothèse.

ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ϛ κύκλου. Ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ εὐθεῖαι αἱ ποτὶ τῷ Θ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι· ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ἇν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ πασᾶν ὁμοῖοι τομέες, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ἐλάσσονές ἐντι ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν· δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ ΑΖΗΙ κύκλῳ, οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι· ἐλάσσων ἄρα ὁ ΑΖΗΙ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἢ τριπλασίων. Τοῦ δὲ ϛ κύκλου τριπλασίων· ἐλάσσων ἄρα ὁ ϛ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων· οὐκ ἄρα ἐστὶν τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ ἔλασσον τοῦ ϛ χωρίου.

Οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, μεῖζον. Ἔστι δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον

2 δὴ Heiberg : δὲ codd. || αἱ εὐθεῖαι αἱ Torellius et Heiberg : εὐθεῖαι codd. || τῷ Heiberg : τὸ codd. || 4 αἱ add. Heiberg || 6 μεγίστα Heiberg : μείζων codd. || ἐλαχίστα Heiberg : ἐλάσσων codd. || 8 αἱ add. Heiberg || 10 ἀναγεγράφαται Heiberg : ἀναγέγραπται codd. || 14 ἀλλαλᾶν CGH : ἄλλαλα DE || 18 περιγεγραμμένῳ BDEGH : προγεγραμμένῳ C || 19 ΑΖΗΙ Heiberg : ΑΖΗΙΚ mss. CDEGH, akzhi ms. B || 23 ἔλασσον DEGH : ἐλάσσων C || 24 χωρίου BCDEH : κύκλου G.

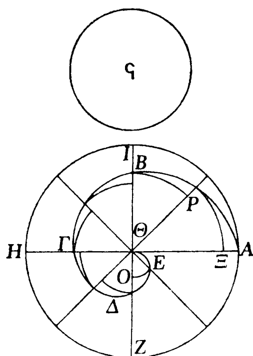


Fig. 24

ΑΒΓΔΕΘ et la droite ΑΘ une figure telle que l'excès de l'aire indiquée sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès de l'aire indiquée sur le cercle ϛ[1]. Que la figure soit donc inscrite. Soit ΘΡΞ le plus grand et ΟΘΕ le plus petit des secteurs dont est composée la figure inscrite. Il est ainsi évident que la figure inscrite est supérieure au cercle ϛ. Que les droites comprenant les angles égaux de sommet Θ soient prolongées jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. Il y a donc de nouveau certains segments de droite, menés du point Θ à la spirale[2], qui se dépassent les uns les autres d'une même grandeur et dont le plus grand est ΘΑ, le plus petit ΘΕ, ce dernier étant égal à leur différence. Mais il y a aussi d'autres segments de droite, joignant le point Θ à la circonférence du cercle ΑΖΗΙ, au même nombre que ceux que nous venons de dire, mais de même longueur, chacun, que le plus grand

1. Cf. prop. 21, coroll.
2. Cf. prop. 12.

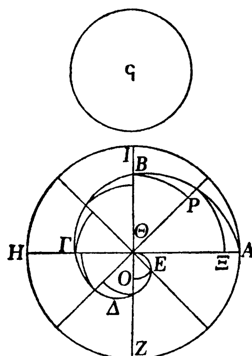


Fig. 24

ὑπὸ τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ϛ κύκλου. Ἐγγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΡΞ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστιν τοῦ ϛ κύκλου. Ἐκβεβλήστωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ Θ, ἔστε κα ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι. Πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἆν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, καί ἐστιν ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΑΖΗΙ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα

1 ΑΒΓΔΕΘ ms. B : ΑΒΓΔΘ mss. CDEGH ‖ 6 ἐλάχιστος G : ἐλάσσων BCDEH ‖ ΟΘΕ ms. B : ΘΕ mss. CDEGH ‖ 7 ὅτι BCG : om. DEH ‖ μεῖζόν DEGH : μείζων C ‖ 9 τῷ Heiberg : τὸ codd. ‖ ἔστε κα Heiberg : ἔστ' ἂν DEGH ἔστ' ἄν κα C ‖ 11 αἱ add. Heiberg ‖ 13 αἱ add. Heiberg.

de ceux-ci ; sur tous ces segments de droite sont construits des secteurs semblables, aussi bien sur ceux qui sont égaux entre eux et au plus grand que sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur. La somme des secteurs construits sur les segments de droite égaux au plus grand est donc supérieure au triple de la somme des secteurs construits sur les segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, au secteur près qui est construit sur le plus grand segment ; car cette propriété a été démontrée[1]. Or la somme des secteurs construits sur les segments de droite égaux au plus grand est équivalente au cercle AZHI, alors que la somme des secteurs construits sur les segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur est équivalente à la figure inscrite, au secteur près qui est construit sur le plus grand des segments de droite. Il s'ensuit que le cercle AZHI est supérieur au triple de la figure inscrite. Mais ce cercle est équivalent au triple du cercle Ϛ. Le cercle Ϛ est donc supérieur à la figure inscrite ; or il n'est pas supérieur, mais inférieur. Par conséquent, l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕΘ et la droite ΑΘ n'est pas non plus supérieure au cercle Ϛ ; elle lui est donc équivalente.

25.

Le rapport de l'aire, comprise entre une spirale décrite dans la deuxième révolution et la deuxième droite origine de la révolution, au deuxième cercle est égal au rapport de 7 à 12, qui est aussi le rapport entre la somme du rectangle, compris entre le rayon du deuxième et le rayon du premier cercle, et du tiers du carré sur l'excédent du rayon du deuxième cercle sur le rayon du premier cercle, d'une part, et, d'autre part, le carré sur le rayon du deuxième cercle.

1. Cf. prop. 10, coroll.

τᾳ̃ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ πασᾶν ὁμοῖοι τομέες ἀπό τε τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾳ̃ μεγίστᾳ καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾳ̃ μεγίστᾳ μείζονές ἐντι ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας· δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾳ̃ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ ΑΖΗΙ κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ἴσοι τῷ ἐγγεραμμένῳ σχήματι· μείζων ἄρα ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Τοῦ δὲ ϛ κύκλου τριπλασίων· μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ϛ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστιν δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων· οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον τὸ ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας τοῦ ϛ κύκλου. Ἴσον ἄρα ἐστίν [τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας].

κεʹ.

Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾳ̃ δευτέρᾳ περιφορᾳ̃ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας τᾶν ἐν τᾳ̃ ἀρχᾳ̃ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ζ̄ ποτὶ τὰ ιβ̄, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου κύκλου καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾳ̃ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου κύκλου ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου.

4 ἐντι BDEGH : ἔν τε C || 9 ἀπὸ BG : ὑπὸ CDEH || 11 δὲ om. C || 14 ΑΒΓΔΕΘ ms. B : ΑΒΗΕΘ mss. CDEGH || 15 ἴσον BDEGH : ἴσος C || 18 περιλαφθὲν add. Heiberg || 23 δευτέρου Heiberg : β̄ codd. || 24 πρώτου Heiberg : ᾱ codd. || 26 δευτέρου Heiberg : β̄ codd. || 27 πρώτου Heiberg : ᾱ codd. || 28 δευτέρου Heiberg : β̄ codd.

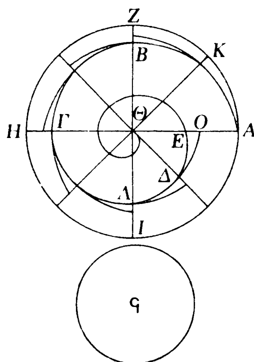


Fig. 25

Soit la spirale ΑΒΓΔΕ décrite dans la deuxième révolution, le point Θ l'origine de la spirale, ΘΕ la première droite origine de la révolution, ΑΕ la deuxième droite origine de la révolution, ΑΖΗΙ le deuxième cercle, et ΑΗ et ΙΖ deux diamètres (sc. de ce cercle) perpendiculaires l'un à l'autre. Il faut démontrer que l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕ et la droite ΑΕ est au cercle ΑΖΗΙ dans le rapport de 7 à 12.

Soit un cercle ϛ tel que le carré sur son rayon soit équivalent à la somme du rectangle de côtés ΑΘ et ΘΕ et du tiers du carré sur ΑΕ ; le rapport du cercle ϛ au cercle ΑΗΖΙ sera alors égal au rapport de 7 à 12, puisque le rapport du carré sur le rayon de ϛ au carré sur le rayon du cercle ΑΖΗΙ est lui aussi égal à ce rapport[1] (sc. de 7 à 12). Nous allons donc montrer que le cercle ϛ est équivalent à l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕ et la droite ΑΕ.

En effet, s'il ne lui est pas équivalent, il lui est ou bien supérieur ou bien inférieur. Qu'il lui soit d'abord, si possible, supérieur. Il est donc possible de circonscrire

1. Cf. Eucl. XII, 2.

Fig. 25

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ ΑΒΓΔΕ, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἔστω δὲ τὸ μὲν Θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΘΕ εὐθεῖα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα, ἁ δὲ ΑΕ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ δευτέρα, ὁ δὲ κύκλος ὁ ΑΖΗΙ ὁ δεύτερος ἔστω, καὶ αἱ ΑΗ, ΙΖ διάμετροι ποτ᾽ ὀρθὰς ἀλλάλαις. Δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας ποτὶ τὸν ΑΖΗΙ κύκλον λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ̅ ποτὶ ιβ̅.

Ἔστω δή τις κύκλος ὁ ϛ, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ϛ κύκλου δυνάμει ἴσα τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ περιεχομένῳ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνου · ἕξει δὴ ὁ ϛ κύκλος ποτὶ τὸν ΑΗΖΙ ὡς ζ̅ ποτὶ ιβ̅, διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΖΗΙ κύκλου τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. Δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ϛ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάττων. Ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. Δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ

12 ζ̅ DEGH : ἑπτὰ C || ιβ̅ DEGH : δώδεκα C.

à l'aire indiquée une figure plane, composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur l'aire soit inférieur à l'excès du cercle Ϛ sur l'aire[1]. Que cette figure soit circonscrite ; soit ΘAK le plus grand, ΘOΔ le plus petit des secteurs dont est composée la figure circonscrite ; il est dès lors évident que la figure circonscrite est inférieure au cercle. Prolongeons les droites qui font des angles égaux de sommet Θ jusqu'à leur rencontre avec le deuxième cercle. Il y a donc des segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur[2], à savoir les segments menés du point Θ à la spirale, dont le plus grand est ΘA et le plus petit ΘE, mais il y a aussi d'autres segments de droite, à savoir ceux qui sont menés du point Θ à la circonférence du cercle AZHI au même nombre, moins une unité, que les derniers et égaux en longueur entre eux et égaux au plus grand d'entre eux, et des secteurs semblables sont construits tant sur ceux qui sont égaux au plus grand que sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, alors qu'il n'y a pas de secteur construit sur le plus petit ; le rapport de la somme des secteurs construits sur les segments égaux au plus grand à la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, non compris le secteur sur le plus petit segment, est donc inférieur au rapport du carré sur le plus grand segment ΘA à la somme du rectangle de côtés AΘ et ΘE et du tiers du carré sur EA, cette propriété ayant été démontrée[3]. Or la somme des secteurs construits sur les segments égaux entre eux et égaux au plus grand est égale au cercle AZHI, et la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, non compris le secteur sur le plus petit segment, est égale à la figure circonscrite ; il s'ensuit que le rapport du cercle (sc. AZHI) à la figure circonscrite est inférieur

1. Cf. prop. 22, coroll.
2. Cf. prop. 12.
3. Cf. prop. 11, coroll.

χωρίον περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ Ϙ κύκλος τοῦ χωρίου. Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΟΔ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστιν τοῦ κύκλου. Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τῷ Θ ἴσας γωνίας, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πέσωντι. Ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἃν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΑΖΗΙ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγεγράφαται ὁμοῖοι τομέες ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς ἐλαχίστας οὐκ ἀναγράφεται· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου· δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομέεσσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσος ὁ ΑΖΗΙ κύκλος, τοῖς δὲ τομέεσσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα

8 τῷ Heiberg : τὸ codd. ‖ 11 ποτιπίπτουσαι G : ποτιπίπτουσιν BCDEH ‖ 12 ποτὶ Heiberg : ἐπὶ codd. ‖ 14 ἐλάσσονες C : ἐλάσσων DEH ἐλάσσους G ‖ ταυτᾶν Heiberg : ἑαυτᾶν codd. ‖ 17 ἀναγράφεται DEH : ἀναγεγράφεται C ἀναγέγραπται G ‖ 19 ἀλλαλᾶν CGH : ἀλλᾶν DE ‖ 24 ἀλλάλαις EG : ἀλλάλας CDH ‖ 25 ΑΖΗΙ mss. BCG : ΑΖΗ mss. DEH ‖ 28 σχῆμα om. C.

au rapport du carré sur AΘ à la somme du rectangle de côtés AΘ et ΘE et du tiers du carré sur AE. Mais le rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘE et du tiers du carré sur AE est égal au rapport du cercle AZHI au cercle ϛ[1] ; le rapport du cercle AZHI à la figure circonscrite est donc inférieur à son rapport au cercle ϛ ; le cercle ϛ est, par conséquent, inférieur à la figure circonscrite[2]. Mais il n'est pas inférieur, mais supérieur (sc. à cette figure) ; le cercle ϛ n'est donc pas supérieur à l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et la droite AZ.

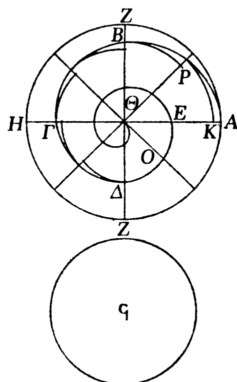


Fig. 26

Mais il ne lui est pas non plus inférieur. Qu'il le soit, en effet, si possible. Il est donc encore possible d'inscrire dans l'aire comprise entre la spirale et la droite AE une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et la droite AE sur la figure inscrite

1. Cf. Eucl. V, 7, coroll.
2. Cf. Eucl. V, 10.

ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΘ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνου. Ὃν δὲ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ τὸν ϛ κύκλον· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν ϛ κύκλον· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ϛ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων· οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ ϛ κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΖ εὐθείας.

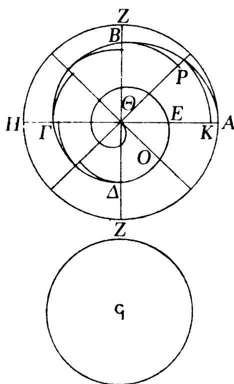


Fig. 26

Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. Πάλιν οὖν δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος

4 ΘΕ ms. B : ΑΕ mss. CDEGH ‖ 17 μεῖζον εἶμεν BDEGH : μείζονι μὲν C.

soit inférieur à l'excès de la même aire sur le cercle ϛ[1]. Que cette figure soit donc inscrite, et soit ΘKP le plus grand des secteurs dont elle est composée, et ΘEO le plus petit. Il est donc évident que la figure inscrite est supérieure au cercle ϛ[2]. Prolongeons les droites faisant des angles égaux de sommet Θ jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. Il y a ainsi de nouveau des segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, à savoir ceux qui sont menés du point Θ à la spirale[3], le plus grand étant ΘA, le plus petit ΘE, mais il y a aussi d'autres segments de droite, à savoir ceux qui sont menés de Θ à la circonférence du cercle, dont le nombre est d'une unité plus petit que celui des premiers, et qui sont égaux en grandeur entre eux et égaux au plus grand ; des secteurs semblables sont construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur ainsi que sur ceux qui sont égaux au plus grand ; dès lors, le rapport de la somme des secteurs, construits sur les segments égaux au plus grand segment, à la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, non compris le secteur sur le plus grand segment, est supérieur au rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés AΘ et ΘE et du tiers du carré sur EA[4]. Or la somme des secteurs sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, sans le secteur sur le plus grand segment, est égale à la figure inscrite dans l'aire, et la somme des autres secteurs est égale au cercle ; il s'ensuit que le rapport du cercle AZHI à la figure inscrite est supérieur au rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘE et du tiers du carré sur AE, c'est-à-dire au rapport du cercle AZHI au cercle ϛ[5] ; le cercle ϛ est donc supérieur à la figure inscrite[6], ce qui est impossible, du moment

1. Cf. prop. 22, coroll.
2. Cf. prop. 24.
3. Cf. prop. 19.
4-6. Cf. notes compl.

ἐλάσσονι, ᾗ ᾧ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ Ϛ κύκλου. Ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΚΡ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΕΟ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ Ϛ κύκλου. Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ποιοῦσαι ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ Θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι. Πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἃν μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ὁμοῖοι τομέες καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου. Ἔστιν δὲ τοῖς μὲν τομέεσσιν τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἑτέροις ὁ κύκλος· μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνου, τουτέστιν ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ τὸν Ϛ κύκλον. Μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ Ϛ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον·

3 ΘΚΡ mss. BCDEG : ΘΧΡ ms. H ‖ 6 τῷ C : τὸ DEGH ‖ 12 μιᾷ G : μίαν CDEH ‖ ταυτᾶν Heiberg : ταύτῃ DEH ταύτᾳ C αὐτᾶν G ‖ 19 ὑπὸ Heiberg : ὑπό τε codd. ‖ τρίτον CDEH : τρίτον μέρος G ‖ 20 ἀπὸ BG : ὑπὸ CDEH ‖ 24 ΑΖΗΙ mss. BDEGH : ΑΗΖΙ ms. C.

qu'il lui était inférieur. Le cercle ϛ n'est donc pas non plus inférieur à l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕ et la droite ΑΕ ; il lui est donc égal.

Corollaire

On montrera par le même raisonnement que le rapport de l'aire comprise entre la spirale décrite dans n'importe quelle révolution et la droite désignée par le nombre des révolutions au cercle désigné par le même nombre des révolutions est égal au rapport de la somme du rectangle, ayant pour côtés le rayon du cercle désigné par ce même nombre et le rayon du cercle désigné par le nombre des révolutions diminué d'une unité, et du tiers du carré sur l'excédent, dont le rayon du plus grand des cercles indiqués dépasse le rayon du plus petit des cercles indiqués, au carré sur le rayon du plus grand des cercles indiqués.

26.

Le rapport de l'aire comprise entre une spirale, inférieure à la spirale décrite dans une révolution, et n'ayant pas comme extrémité l'origine de la spirale, et les droites menées de ses extrémités à l'origine de la spirale au secteur ayant un rayon égal au plus grand des segments de droite menés des extrémités à l'origine de la spirale et un arc égal à l'arc compris entre les droites indiquées, du côté de la spirale, est égal au

ἦν γὰρ ἐλάσσων. Οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ Ϙ κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας · ὥστε ἴσος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται καὶ διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένας ποτὶ τὸν κύκλον τὸν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν ἑνὶ ἐλάσσονα τᾶν περιφορᾶν λεγομένου καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τῶν εἰρημένων, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων.

κϛ'.

Τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν ποτὶ τὸν τομέα τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν τᾷ μείζονι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, τὰν δὲ περιφέρειαν, ἅ ἐστι μεταξὺ τᾶν εἰρημενᾶν εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι, τοῦτον ἔχει

7 κατὰ Heiberg : ποτὶ codd. || 12 τοῦ alt. DEGH : τὸ C || τὸν ἑνὶ Heiberg : τὸ μενι C μὲν ἑνὶ DEGH || 23 τῶν περάτων Torellius : τοῦ πέρατος codd. || 26 ἅ ἐστι Basil. : ἅ ἐστι τᾷ codd.

rapport de la somme du rectangle, ayant pour côtés les segments de droite menés des extrémités de la spirale à l'origine de la spirale, et du tiers du carré sur l'excédent du plus grand des segments indiqués sur le plus petit, au carré sur le plus grand des segments menés des extrémités de la spirale à l'origine de la spirale.

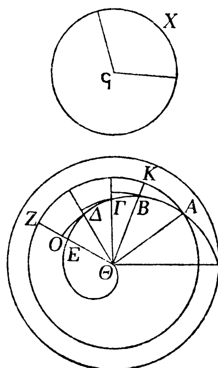


Fig. 27

Soit une spirale ΑΒΓΔΕ, inférieure à la spirale décrite dans une révolution, A et E ses extrémités, et Θ l'origine de la spirale ; autour de Θ comme centre et avec un rayon égal à ΘA décrivons un cercle, et soit Z l'intersection de la circonférence de ce cercle avec la droite ΘE. Il faut démontrer que le rapport de l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕ et les droites AΘ et ΘE au secteur AΘZ est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés AΘ et ΘE et du tiers du carré sur EZ au carré sur ΘA.

τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τᾶν εἰρημενᾶν εὐθειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεισᾶν.

Fig. 27

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔΕ, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ Α, Ε, ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ Θ σαμεῖον, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΑ κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. Δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ΑΘ, ΘΕ ποτὶ τὸν τομέα τὸν ΑΘΖ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ.

2 ὑπὸ DEGH : ἀπὸ C ‖ 3 ἀγμενᾶν DEGH : ἀγομενᾶν C ‖ 11 τῷ pr. CEG : τὸ DH ‖ τῷ alt. CEG : τὸ DH.

Soit donc un cercle ϟX tel que le carré sur son rayon soit équivalent à la somme du rectangle de côtés AΘ et ΘE et du tiers du carré sur EZ ; qu'il y ait dans ce cercle un angle au centre égal à l'angle de sommet Θ ; le secteur ϟX est alors au secteur ΘAZ comme la somme du rectangle de côtés AΘ et ΘE et du tiers du carré sur EZ est au carré sur ΘA, puisque les carrés sur les rayons ont entre eux ce rapport. On démontrera donc que le secteur Xϟ est équivalent à l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et les droites AΘ et ΘE.

En effet, s'il ne lui est pas équivalent, il lui est ou bien supérieur ou bien inférieur. Qu'il lui soit d'abord, si possible, supérieur. Il est alors possible de circonscrire à l'aire indiquée une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur l'aire indiquée soit inférieur à l'excès du secteur ϟX sur l'aire indiquée[1]. Que cette figure soit donc circonscrite, et soit ΘAK le plus grand des secteurs dont est composée la figure circonscrite, et ΘOΔ le plus petit de ces secteurs ; il est dès lors évident que la figure circonscrite est inférieure[2] au secteur Xϟ. Menons les droites qui font les angles égaux de sommet Θ jusqu'à leur rencontre avec l'arc du secteur ΘAZ. On a alors des segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, à savoir les segments menés du point Θ à la spirale[3], le plus grand étant ΘA, le plus petit ΘE, mais il y a aussi d'autres segments de droite, dont le nombre est égal à celui des premiers diminué d'une unité, égaux en grandeur entre eux et égaux au plus grand, à savoir les segments menés du point Θ à l'arc du secteur AΘZ, sauf le segment ΘZ, et des secteurs semblables sont construits sur tous ces

1. Cf. prop. 23, coroll.
2. Cf. prop. 24.
3. Cf. prop. 12.

Ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ϘΧ, τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ, ποτὶ δὲ τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ ποτὶ τῷ Θ· ὁ δὴ τομεὺς ὁ ϘΧ ποτὶ τὸν τομέα τὸν ΘΑΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ τετράγωνον· αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ' ἀλλάλας. Δειχθήσεται δὴ ὁ ΧϘ τομεὺς ἴσος ἐὼν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἢ ἐλάττων ἐστίν. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. Δυνατὸν οὖν ἐστιν περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ϘΧ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. Περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΟΔ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΧϘ τομέως. Διάχθωσαν δὴ αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ Θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ ΘΑΖ τομέως πέσωντι. Ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἇν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΑΘΖ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς ΘΖ, καὶ ἀναγεγράφαται ὁμοῖοι τομέες

2 δυνάμει DEGH : δύναμιν C ‖ 11 ἐστίν add. Torellius ‖ ἔστω C : ἔστω γὰρ BDEGH ‖ 14-15 μεῖζον εἶμεν BDEGH : μείζονι μὲν C ‖ 18 μέγιστος Heiberg : μείζων codd. ‖ ἐλάχιστος Heiberg : ἐλάσσων codd. ‖ 19 οὖν om. C ‖ 20 αἱ pr. add. Heiberg ‖ 21 τῷ G : τὸ CDEH ‖ 25 τῷ μὲν DEGH : ἐν μὲν τῷ C ‖ ἐλάσσονες Torellius : ἐλάσσων DEH ἐλάσσους G.

segments, tant sur ceux qui sont égaux entre eux et égaux au plus grand que sur ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur, sauf sur le segment ΘΕ ; dès lors, le rapport de la somme des secteurs construits sur les segments égaux entre eux et égaux au plus grand à la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, non compris le secteur sur le plus petit segment, est inférieur au rapport du carré sur ΘΑ à la somme du rectangle de côtés ΑΘ et ΘΕ et du tiers du carré sur ΕΖ[1]. Or la somme des secteurs construits sur les segments égaux entre eux et égaux au plus grand est égale au secteur ΘΑΖ, et la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur est égale à la figure circonscrite ; le rapport du secteur ΘΑΖ à la figure circonscrite est donc inférieur au rapport du carré sur ΘΑ à la somme du rectangle de côtés ΘΑ et ΘΕ et du tiers du carré sur ΖΕ. Mais le rapport du carré sur ΘΑ à la somme indiquée est égal au rapport du secteur ΘΑΖ au secteur Χϛ ; il s'ensuit que le secteur Χϛ est inférieur à la figure circonscrite[2]. Or il ne lui est pas inférieur, mais supérieur ; le secteur Χϛ ne sera donc pas supérieur à l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕ et les droites ΑΘ, ΘΕ.

Mais il ne lui est pas non plus inférieur. Qu'il le soit, en effet, et que les autres constructions restent les mêmes. Il est donc encore possible d'inscrire dans l'aire (sc. en question) une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de l'aire indiquée sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès de cette même aire sur le secteur Χϛ. Que cette figure soit donc inscrite, et soit ΘΒΓ le plus grand, ΟΘΕ le plus petit des secteurs dont elle est composée ;

1. Cf. prop. 11, coroll.
2. Cf. Eucl. V, 10.

ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς ΘΕ οὐκ ἀναγέγραπται· τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετραγώνου. Ἔστιν δὲ τοῖς μὲν τομέεσσιν τοῖς ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσος ὁ ΘΑΖ τομεύς, τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν τὸ περιγεγραμμένον· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ ΘΑΖ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΖΕ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ ΘΑΖ τομεὺς ποτὶ τὸν ΧϚ τομέα· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΧϚ τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων· οὐκ ἄρα ἐσσεῖται ὁ ΧϚ τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν.

Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. Ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ ΧϚ τομέως. Ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΒΓ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ· δῆλον

7 τό τε Heiberg : τά τε codd. ‖ 14 τό τε CG : τῷ τε DEH ‖ 17 ΧϚ pr. Torellius : Χ codd. ‖ ΧϚ alt. Torellius : Χ codd. ‖ 19 ΧϚ mss. BDEG : Χ ms. C ‖ 24 μεῖζον εἶμεν BDEGH : μείζονι μὲν τὸ C ‖ 25 ἐλάσσονι BCG : ἔλασσον DEH ‖ 26 ΧϚ mss. BDEGH : Χ ms. C ‖ 28 μέγιστος Heiberg : μείζων DEG μεῖζον CH ‖ ἐλάχιστος Heiberg : ἐλάσσων BDEGH ἔλασσον C ‖ ΟΘΕ Basil. : toe ms. B, ΘΕ mss. CDEGH.

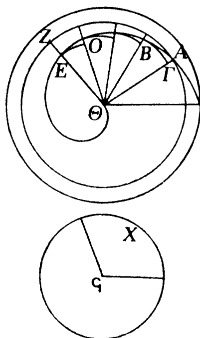


Fig. 28

il est dès lors évident que la figure inscrite est supérieure au secteur Xϛ. Nous avons donc de nouveau des segments de droite se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, à savoir les segments menés du point Θ à la spirale[1], le plus grand étant ΘA et le plus petit ΘE, mais il y a aussi d'autres segments de droite, à savoir ceux qui sont menés du point Θ à la circonférence du secteur ΘAZ, sans le segment ΘA, d'une unité moins nombreux que les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, mais égaux en grandeur entre eux et égaux au plus grand, et sur chacun de ces segments sont construits des secteurs semblables, sauf sur le plus grand de ceux qui se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur ; le rapport de la somme des secteurs construits sur les segments égaux entre eux et égaux au plus grand à la somme des secteurs construits sur les segments se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, sans le secteur sur le plus grand segment, est donc supérieur au rapport du carré sur ΘA à la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘE et du tiers du carré sur EZ[2] ; par conséquent le rapport

1. Cf. prop. 12.
2. Cf. prop. 11, coroll.

Fig. 28

οὖν ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΧϘ τομέως. Πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἆν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΘΑΖ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς ΘΑ τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσαι, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ ἑκάστας ὁμοῖοι τομέες, ἀπὸ δὲ τᾶς μεγίστας τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν οὐκ ἀναγέγραπται· οἱ τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ· ὥστε καὶ

1 ἐγγεγραμμένον BCGE : γεγραμμένον DH ‖ ΧϘ Heiberg : X codd. ‖ 3 αἱ add. Torellius ‖ 5 αἱ add. Torellius ‖ 7 μιᾷ CG : μιᾶς DEH ‖ τῷ pr. CE : om. DGH ‖ 8 ἀναγεγράφαται E : ἀναγεγράφεται CDGH ‖ 9 τᾶς μεγίστας BCG : τᾶν μεγιστᾶν DEH ‖ 10 τᾶν C : τῶν G om. DEH ‖ 12 τῷ CG : om. DEH ‖ 15 ΘΕ mss. BCG : ΑΕ mss. DEH ‖ ὥστε CG : quia B ἔστω DEH.

du secteur ΘAZ à la figure inscrite est lui aussi supérieur à son rapport au secteur XϚ, d'où il suit que le secteur XϚ est supérieur à la figure inscrite[1]. Or il ne lui est pas supérieur, mais inférieur ; il s'ensuit que le secteur XϚ n'est pas non plus inférieur à l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕ et les droites ΑΘ et ΘΕ ; il est donc équivalent à cette aire.

27.

Les aires comprises entre les spirales et les droites (sc. origines) de la révolution sont équivalentes, la troisième au double de la seconde, la quatrième au triple, la cinquième au quadruple, et les aires suivantes chaque fois à un multiple de la seconde aire suivant l'ordre des nombres, et la première aire est équivalente à la sixième partie de la seconde.

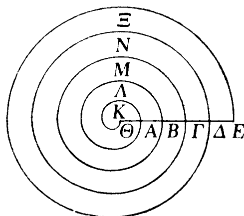


Fig. 29

Que la spirale proposée soit décrite dans la première, dans la deuxième et dans les révolutions suivantes aussi nombreuses que l'on voudra. Soit Θ l'origine de la spirale, ΘΕ la droite origine de la révolution. Soit K

1. Cf. Eucl. V, 10.

ὁ ΘΑΖ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ποτὶ τὸν Χϙ τομέα· ὥστε μείζων ὁ Χϙ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων· οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ Χϙ τομεὺς τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν· ἴσος ἄρα.

κζ'.

Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τᾶν ἑλίκων καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἐν τᾷ περιφορᾷ τὸ μὲν τρίτον τοῦ δευτέρου διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ τέταρτον τριπλάσιον, τὸ δὲ πέμπτον τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ πρῶτον χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου.

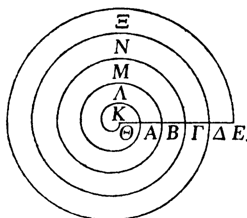


Fig. 29

Ἔστω ἁ προκειμένα ἕλιξ ἔν τε τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα καὶ ἐν τᾷ δευτέρᾳ καὶ ἐν ταῖς ἑπομέναις ὁποσαισοῦν, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ Θ σαμεῖον, ἁ δὲ ΘΕ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, τῶν δὲ χωρίων

2 Χϙ pr. Heiberg : Χ codd. ‖ Χϙ alt. ms. C : Χ mss. BDEGH ‖ 4 Χϙ Heiberg : Χ codd. ‖ 5 ΑΒΓΔΕ mss. BDEGH : ΑΒΓΔ ms. C ‖ 6 ἴσος C : ἴσα BDEGH ‖ 9 τρίτον Heiberg : γ̅ codd., et similiter in tota propositione ‖ 14 προκειμένα BCGH : προκειμένω DE ‖ 16 δὲ add. Heiberg.

la première des aires, Λ la seconde, M la troisième, N la quatrième, Ξ la cinquième. Il faut démontrer que l'aire K est équivalente à la sixième partie de l'aire suivante, que l'aire M est double de l'aire Λ, l'aire N triple de l'aire Λ, et que les aires suivantes sont chaque fois des multiples de l'aire Λ suivant l'ordre des nombres.

Voici comment on démontre que K est équivalent au sixième de Λ. Puisqu'il a été démontré que le rapport de la somme des aires K et Λ au second cercle est égal[1] au rapport de 7 à 12, que le second cercle est, comme cela est évident[2], au premier cercle comme 12 est à 3, et que le premier cercle est à l'aire K comme[3] 3 est à 1, il en résulte que l'aire K est la sixième partie de l'aire Λ. D'autre part, il a été démontré[4] que le rapport de la somme des aires K, Λ et M au troisième cercle est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΓΘ et ΘB et du tiers du carré construit sur ΓB au carré sur ΓΘ. Mais le troisième cercle est au deuxième comme le carré sur ΓΘ est au carré sur ΘB[5], et le deuxième cercle est à la somme des aires K et Λ comme le carré sur BΘ est à la somme du rectangle de côtés BΘ et ΘA et du tiers du carré sur AB[1] ; il s'ensuit que le rapport de la somme des aires K, Λ et M à la somme des aires K et Λ est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΓΘ et ΘB et du tiers du carré sur ΓB à la somme du rectangle de côtés BΘ et ΘA et du tiers du carré[6] sur AB. Or ces dernières grandeurs sont entre elles comme 19 est[7] à 7, de façon que le rapport de la somme des aires K, Λ et M à la somme des aires Λ et K est égal au rapport de 19 à 7. Le rapport de l'aire M à la somme des aires K et Λ est ainsi égal au rapport[8] de 12 à 7. Mais le rapport de la somme des aires K et Λ à l'aire Λ est égal au rapport de 7 à 6. Il est donc évident[9] que l'aire M est double de l'aire Λ.

1. Cf. prop. 25.
2. Cf. Eucl. XII, 2.
3-9. Cf. notes compl.

ἔστω τὸ μὲν Κ τὸ πρῶτον, τὸ δὲ Λ τὸ δεύτερον, τὸ δὲ Μ τὸ τρίτον, τὸ δὲ Ν τὸ τέταρτον, τὸ δὲ Ξ τὸ πέμπτον. Δεικτέον ὅτι τὸ μὲν Κ χωρίον ϛʹ μέρος ἐστὶ τοῦ ἑπομένου, τὸ δὲ Μ διπλάσιον τοῦ Λ, τὸ δὲ Ν τριπλάσιον τοῦ Λ, καὶ τῶν ἑξῆς ἀεὶ τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ Λ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς.

Ὅτι μὲν οὖν τὸ Κ ϛʹ μέρος ἐστὶ τοῦ Λ, ὧδε δείκνυται. Ἐπεὶ τὸ ΚΛ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ζ̅ ποτὶ τὰ ι̅β̅, ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ποτὶ τὸν πρῶτον κύκλον ὡς ι̅β̅ ποτὶ τὰ γ̅· δῆλον γάρ ἐστιν· ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ποτὶ τὸ Κ χωρίον ἔχει ὡς γ̅ ποτὶ α̅, ϛʹ ἄρα ἐστὶ τὸ Κ χωρίον τοῦ Λ. Πάλιν δὲ καὶ τὸ ΚΛΜ χωρίον ποτὶ τὸν τρίτον κύκλον δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ ΓΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τετράγωνον. Ὁ δὲ τρίτος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΘ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΒ, ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ ΚΛ χωρίον ὃν τὸ ἀπὸ ΒΘ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου· καὶ τὸ ΚΛΜ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΘ, ΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου. Ταῦτα δὲ ἔχει ποτὶ ἄλλαλα λόγον, ὃν ι̅θ̅ ποτὶ τὰ ζ̅· ὥστε καὶ τὸ ΚΛΜ χωρίον ποτὶ τὸ ΛΚ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ι̅θ̅ ποτὶ τὰ ζ̅· αὐτὸ οὖν τὸ Μ ποτὶ τὸ ΚΛ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ι̅β̅ ποτὶ τὰ ζ̅. Τὸ δὲ ΚΛ ποτὶ τὸ Λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ̅ ποτὶ τὰ ϛ̅· δῆλον οὖν ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ Μ τοῦ Λ.

4 Ν τριπλάσιον BG : ν̅γ̅π̅ ms. E, η̅γ̅π̅ mss. DH ‖ 9 ἔχον Heiberg : ἔχειν codd. ‖ 12 Λ ms. B : Α mss. CDEGH ‖ 21 *καὶ* — 24 τετραγώνου add. Commandinus et Heiberg ‖ 29 οὖν ὅτι BG : ὅτι οὖν DEH.

Nous allons démontrer maintenant que les aires suivantes sont dans le rapport des nombres successifs. En effet, le rapport de la somme des aires K, Λ, M, N, Ξ au cercle de rayon ΘE est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés EΘ et ΘΔ et du tiers du carré sur ΔE au carré sur ΘE[1]. Mais le cercle de rayon ΘE est au cercle de rayon ΘΔ comme le carré sur ΘE est au carré[2] sur ΘΔ, et le cercle de rayon ΔΘ est à la somme des aires K, Λ, M et N comme le carré sur ΘΔ est à la somme du rectangle de côtés ΘΔ et ΘΓ et du tiers du carré sur ΔΓ[1]. Il s'ensuit que la somme des aires K, Λ, M, N, Ξ est à la somme des aires K, Λ, M, N comme la somme du rectangle de côtés ΘE et ΘΔ et du tiers du carré sur ΔE est à la somme du rectangle de côtés ΔΘ et ΘΓ et du tiers du carré sur ΔΓ. Par dissociation[3], l'aire Ξ est à la somme des aires K, Λ, M, N comme la différence entre la somme du rectangle de côtés EΘ et ΘΔ et du tiers du carré sur EΔ et la somme du rectangle de côtés ΔΘ et ΘΓ et du tiers du carré sur ΓΔ est à la somme du rectangle de côtés ΔΘ, ΘΓ et du tiers du carré sur ΔΓ. Or la différence entre ces deux sommes est égale à la différence entre le rectangle de côtés ΘE et ΘΔ et le rectangle de côtés ΘΔ et ΘΓ, et cette différence n'est autre que le rectangle de côtés ΔΘ et ΓE. Il s'ensuit que le rapport de l'aire Ξ à la somme des aires K, Λ, M, N est égal au rapport du rectangle de côtés ΘΔ et ΓE à la somme du rectangle de côtés ΔΘ et ΘΓ et du tiers du carré sur ΓΔ.

On démontrera de la même manière que le rapport de l'aire N à la somme des aires K, Λ, M est égal au rapport du rectangle de côtés ΘΓ et BΔ à la somme du rectangle de côtés ΘΓ et ΘB et du tiers du carré

1. Cf. prop. 25, coroll.
2. Cf. Eucl. XII, 2.
3. Procédé de transformation d'une proportion qui consiste à déduire de la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ la proportion $\frac{a\text{-}b}{b} = \frac{c\text{-}d}{d}$; cf. Eucl. V, 17.

Ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. Τὸ γὰρ ΚΛΜΝΞ ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ ΘΕ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΔ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΕ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΕ τετράγωνον. Ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ ΘΕ, ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ ΘΔ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΕ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΔ τετράγωνον, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ ΔΘ, ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΔ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου· καὶ τὸ ΚΛΜΝΞ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΕ, ΘΔ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ· διελόντι καὶ τὸ Ξ χωρίον ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχὰ τοῦ τε ὑπὸ ΕΘ, ΘΔ μετὰ τοῦ τρίτου μέρεος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΔ καὶ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ μετὰ τοῦ τρίτου μέρεος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ ποτί τε τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ· ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τῶν συναμφοτέρων ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΘΔ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ, ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΓΕ· τὸ Ξ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου. Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ Ν ποτὶ τὸ ΚΛΜ χωρίον λόγον ἔχον τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΒΔ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ ΓΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΓΒ τετραγώνου·

2 ΚΛΜΝΞ ms. B : ΗΚΛΜΝΞ mss. CDEGH ‖ 10 ἐκ Heiberg : ἀπὸ codd. ‖ 13 ΔΓ — 15 τᾶς om. C ‖ 15 ΔΘ ms. B : ΑΘ mss. CDEGH ‖ 18 καὶ — 19 ΓΔ add. Torellius et Heiberg ‖ 23 ὃν τὸ Basil. : ὅν τε DEH ὅν τε τὸ G ‖ 28 τό τε G : τῷ τε DEH.

sur ΓB. L'aire N est donc à la somme des aires K, Λ, M, N comme le rectangle de côtés ΘΓ et BΔ est à la somme du rectangle de côtés ΘΓ et BΔ, du rectangle de côtés ΘΓ et ΘB et du tiers du carré sur ΓB[1], [et inversement]. Or cette dernière somme est équivalente à la somme du rectangle de côtés ΔΘ et ΘΓ et du tiers du carré sur ΓΔ. Du moment donc que le rapport de l'aire Ξ à la somme des aires K, Λ, M, N est égal au rapport du rectangle de côtés ΘΔ, ΓE à la somme du rectangle de côtés ΘΔ et ΘΓ et du tiers du carré sur ΓΔ, et que le rapport de la somme des aires K, Λ, M, N à l'aire N est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘΔ et ΘΓ et du tiers du carré sur ΔΓ au rectangle[2] de côtés ΘΓ et ΔB, l'aire Ξ est à l'aire N comme le rectangle de côtés ΘΔ et ΓE est au rectangle[3] de côtés ΘΓet ΔB. Mais le rapport du rectangle de côtés ΘΔ et ΓE au rectangle de côtés ΘΓ et ΔB est égal au rapport du segment de droite ΘΔ au segment de droite ΘΓ, puisque les segments de droite ΓE et BΔ sont égaux. Il est donc évident qu'à son tour le rapport de l'aire Ξ à l'aire N est égal au rapport de ΘΔ à ΘΓ.

On démontrera de la même manière que l'aire N est à l'aire M comme ΘΓ est à ΘB, et que l'aire M est à l'aire Λ comme BΘ est à AΘ. Or les segments de droite ΔΘ, ΓΘ, BΘ, AΘ sont entre eux comme les nombres successifs.

28.

Si sur une spirale décrite dans n'importe quelle[4] révolution on prend deux points qui ne sont pas ses extrémités, si des points ainsi pris on mène des droites à l'origine de la spirale, et si, autour de l'origine de la spirale comme centre et avec des rayons égaux aux distances des points pris à l'origine de la spirale, on

1-4. **Cf.** notes compl.

τὸ Ν ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ [καὶ ἀνάπαλιν]· ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ξ χωρίον ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου, τὸ δὲ ΚΛΜΝ ποτὶ τὸ Ν ὃν τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ, ἔχει ἄρα καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ. Τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΘΔ ποτὶ τὰν ΘΓ, ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΓΕ, ΒΔ· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΘΔ ποτὶ τὰν ΘΓ.

Ὁμοίως δὲ καὶ δειχθήσεται καὶ τὸ Ν ποτὶ τὸ Μ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ ΘΓ ποτὶ τὰν ΘΒ, καὶ τὸ Μ ποτὶ τὸ Λ, ὃν ἁ ΒΘ ποτὶ τὰν ΑΘ· αἱ δὲ [ΕΘ] ΔΘ, ΓΘ, ΒΘ, ΑΘ εὐθεῖαι τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

κη'.

Εἴ κα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σαμεῖα λαφθέωντι μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σαμείων ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστημάτεσσι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σαμείων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν

2 ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ add. Commandinus et Heiberg ‖ 3 καὶ ἀνάπαλιν codd. : del. Heiberg ‖ 7 τό EG : τῷ DH ‖ 8 τὸ alt. Torellius : τὰ codd. ‖ 11 τὸ pr. G : τὰ BDEH ‖ τᾶν BG : τὰ DEH ‖ 12 ΘΔ mss. BCDG : ΘΑ mss. EH ‖ 19 τὰν G : τὸν DEH ‖ ΕΘ codd. : del. Heiberg ‖ 20 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH ‖ 26 τὰν ἀρχὰν G : τᾷ ἀρχᾷ DEH.

décrit des cercles, l'aire comprise entre le plus grand des arcs de cercle interceptés entre les droites, la spirale comprise entre les mêmes droites et le prolongement du (sc. plus petit) segment de droite sera à l'aire comprise entre le plus petit arc, la même spirale et la droite joignant leurs extrémités comme le rayon du plus petit cercle, augmenté des deux tiers de l'excès du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit cercle, est au rayon du plus petit cercle, augmenté du tiers du même excès.

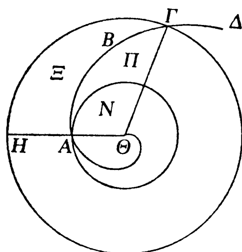


Fig. 30

Soit la spirale ΑΒΓΔ décrite dans une révolution ; prenons sur elle deux points Α et Γ, de manière que l'origine de la spirale soit le point Θ ; menons des droites de Α et de Γ au point Θ, et décrivons des cercles autour de Θ comme centre et avec des rayons égaux à ΘΑ et à ΘΓ. Il faut démontrer que le rapport de l'aire Ξ à l'aire Π est égal au rapport de la somme

τᾶς ἕλικος, κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος τᾶν περιφερειᾶν τᾶν μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ τᾶν αὐτᾶν εὐθειᾶν καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς.

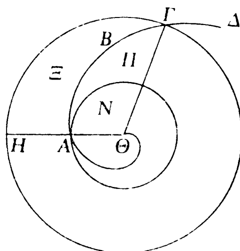


Fig. 30

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔ, ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σαμεῖα τὰ Α, Γ, ὥστε τὸ Θ σαμεῖον ἀρχὰν εἶμεν τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Γ ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κέντρῳ τῷ Θ, διαστημάτεσσι δὲ τοῖς ΘΑ, ΘΓ, κύκλοι γεγράφθωσαν. Δεικτέον ὅτι τὸ Ξ χωρίον ποτὶ τὸ Π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμ-

2 τᾶν sec. Heiberg : τᾶς codd. || 7 ἐλάσσονος add. Torellius || 10-11 ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου Basil. : ad illam quae ex centro maioris B om. DEGH || 15 τῶν Basil. : τᾶν codd. || 16 τῷ EGH : τὸ D.

de AΘ et des deux tiers de HA à la somme de AΘ et d'un tiers de HA.

On a en effet démontré[1] que le rapport de la somme des aires N et Π au secteur HΓΘ est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés HΘ et AΘ et du tiers du carré sur AH au carré sur HΘ ; le rapport de l'aire Ξ à la somme des aires N et Π est donc égal[2] au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et des deux tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés AΘ et ΘH et du tiers du carré sur HA. Et comme le rapport de la somme des aires N et Π au secteur composé des aires N, Π, Ξ est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘH et du tiers du carré sur HA au carré sur ΘH, et que le rapport du secteur NΠΞ au secteur N est égal au rapport du carré sur ΘH au carré sur ΘA, le rapport de la somme des aires N et Π au secteur N est à son tour égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et ΘH et du tiers du carré sur HA au carré[3] sur ΘA ; il s'ensuit que le rapport de la somme des aires N et Π à l'aire Π est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés HΘ et ΘA et du tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés HA et ΘA et du tiers du carré[4] sur HA. Du moment donc que le rapport de l'aire Ξ à la somme des aires N et Π est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et des deux tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés HΘ et ΘA et du tiers du carré sur HA, et que le rapport de la somme des aires N et Π à l'aire Π est égal au rapport de la somme du rectangle de côtés HΘ et ΘA et du tiers du carré

1. Cf. prop. 26.
2. Cf. notes compl.
3. Cf. Eucl. V, 22.
4. Cf. Eucl. II, 3 et V, 19, coroll.

φότερος ἅ τε ΑΘ καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ΗΑ ποτὶ συναμφότερον τάν τε ΑΘ καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς ΗΑ.

Τὸ γὰρ χωρίον τὸ ΝΠ ποτὶ τὸν ΗΓΘ τομέα δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΘ, ΑΘ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΗ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΘ τετράγωνον· αὐτὸ ἄρα τὸ Ξ ποτὶ τὸ ΝΠ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΑΗ μετὰ δύο τριταμορίων τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΝΠ χωρίον ποτὶ τὸν ΝΠΞ τομέα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΗ τετράγωνον, ὁ δὲ ΝΠΞ τομεὺς ποτὶ τὸν Ν τομέα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΗ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ, ἕξει καὶ τὸ ΝΠ χωρίον ποτὶ τὸν Ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ ΘΑ, ΘΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ ποτὶ τὸ ἀπὸ ΘΑ· τὸ ἄρα ΝΠ ποτὶ τὸ Π λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ ποτὶ συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΑ, ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ξ χωρίον ποτὶ τὸ ΝΠ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ ΘΑΗ καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ, τὸ δὲ ΝΠ χωρίον ποτὶ τὸ Π τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ

1 τε add. Heiberg || ΑΘ Heiberg : ΗΘ codd. || ΗΑ ms. B : Η mss. DEGH || 2 ΑΘ Heiberg : ΗΘ codd. || ΗΑ ms. B : ΜΑ mss. DEGH || 4 ἔχον G : ἔχων DEH || 10 ΝΠΞ Torellius : ΝΗΞ codd. || 12 τᾶς G : τοῦ DEH || 13 ΝΠΞ Basil. : ΝΗΞ codd. || 15 Ν mss. DEH : Ν τομέα BG || 18 Π ms. B : ΠΛ mss. DEGH || συναμφότερα BDEH : συναμφότερον G || 19 ΗΑ ms. B : ΜΑ mss. DEGH || ποτὶ B : ποτὶ τὸ G om. DEH || 20 ΘΑ ms. B : ΘΕ mss. DEGH.

sur HA à la somme du rectangle de côtés HA et AΘ et du tiers du carré sur HA, le rapport de l'aire Ξ à l'aire Π sera à son tour égal au rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et des deux tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et du tiers du carré sur HA[1]. Or le rapport de la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et des deux tiers du carré sur HA à la somme du rectangle de côtés ΘA et AH et du tiers du carré sur HA est égal au rapport de la somme du segment de droite ΘA et des deux tiers du segment HA à la somme de ΘA et du tiers de HA ; il est donc évident que le rapport de l'aire Ξ à l'aire Π est égal au rapport de la somme ΘA et des deux tiers de HA à la somme de ΘA et du tiers de HA.

1. Cf. Eucl. V, 22.

τᾶν ΗΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου ποτὶ συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΑΘ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου, ἕξει καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Π τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΑΗ καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ ποτὶ συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΑΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ. Τὰ δὲ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΑΗ καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΑΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα ἅ τε ΘΑ καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ΗΑ ποτὶ συναμφότερον τάν τε ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς ΗΑ· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ Ξ χωρίον ποτὶ τὸ Π χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα ἅ τε ΘΑ καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ΗΑ ποτὶ συναμφότερον τάν τε ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς ΗΑ.

5 ΘΑΗ Heiberg : ΘΗ ΗΑ codd. ‖ 6 ΘΑΗ Heiberg : ΘΗ ΗΑ codd. ‖ 7 ΘΑΗ Heiberg : ΘΗ ΗΑ codd. ‖ 10 ΘΑ Basil. : ΘΗ codd. ‖ 11 συναμφότερον Heiberg : συναμφοτέραν CDEGH συναμφότερα B ‖ τε add. Heiberg ‖ 12 ΘΑ Basil. : ΘΗ codd. ‖ 13 Π Heiberg : Ν codd. ‖ 14 ΘΑ Basil. : ΘΗ codd. ‖ 15 συναμφότερον BCDEH : συναμφότερα G ‖ τε add. Heiberg ‖ ΘΑ Basil. : ΘΗ codd.

DE L'ÉQUILIBRE
OU DES CENTRES DE GRAVITÉ
DES FIGURES PLANES

LIVRES I ET II

NOTICE

Dans ce traité, où l'analyse mathématique est appliquée à la statique du levier, Archimède pose les fondements d'une nouvelle science exacte, appelée à un grand avenir, la mécanique rationnelle.

Les figures planes dont Archimède cherche à déterminer l'équilibre et les centres de gravité sont en réalité des corps solides aplatis, de densité homogène, assimilés à des figures planes. Le premier livre contient les propositions fondamentales de la statique : équilibre de poids égaux suspendus à des bras de levier égaux ; équilibre de poids inégaux suspendus à des bras de levier inégaux ; position du centre de gravité de la somme de deux ou de plusieurs grandeurs de même poids ; proportionnalité inverse de deux grandeurs inégales en équilibre aux distances de leurs points de suspension au point d'appui ; recherche des centres de gravité du parallélogramme, du triangle et du trapèze, par le découpage de ces figures en tranches parallèles. Le deuxième livre est entièrement consacré à la détermination du centre de gravité du segment de parabole par l'inscription « exacte » dans ce segment, d'une suite de triangles, c'est-à-dire par le procédé qui consiste à construire un premier triangle ayant même base et même hauteur que le segment de parabole, à répéter cette construction dans les segments partiels découpés par les côtés du triangle, et ainsi de suite.

L'importance du traité *De l'équilibre des figures planes* pour les notions fondamentales de la statique

des corps solides lui a valu dans les temps modernes de nombreuses études et même des critiques. On a ainsi reproché à Archimède d'opérer dans ses démonstrations avec le centre de gravité des figures examinées sans en avoir présenté une définition. Cette omission peut s'expliquer par la connaissance de la réalité désignée par ce nom qu'Archimède était en droit de prêter à ses lecteurs, à la suite d'un de ses traités antérieurs, perdu aujourd'hui, ou par la diffusion que cette notion avait reçue par d'autres auteurs traitant de questions de mécanique. Une réserve plus grave a été formulée par l'historien de la mécanique E. Mach[1], qui reproche à Archimède d'admettre tacitement comme vraie la propriété qu'il entend démontrer dans la proposition 6 de ce traité, à savoir la loi de la proportionnalité inverse des poids et des distances dans l'équilibre entre des poids inégaux. Mais la critique de Mach méconnaît la portée des postulats placés par Archimède en tête du premier livre de ce traité, en particulier du postulat 6, sur la signification duquel O. Toeplitz[2] et W. Stein[3] ont les premiers attiré l'attention. Dans sa pénétrante analyse du raisonnement d'Archimède, E. J. Dijksterhuis[4] fait ressortir l'analogie qu'il y a entre le cinquième postulat d'Euclide et le 6e postulat du traité *De l'équilibre des figures planes*, en montrant que la proposition 6 de ce traité est fondée sur le postulat 6 de la même manière que la proposition I, 27 d'Euclide est fondée sur le postulat des parallèles. Aujourd'hui, grâce à

1. E. Mach (1839-1916), *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, 7e éd., Leipzig 1912, p. 14 sq.
2. dans ses entretiens et sa correspondance cités par E. J. Dijksterhuis ; O. Toeplitz, théoricien de la connaissance mathématique du xxe siècle, auteur d'études sur Archimède et ses représentations géométriques et mécaniques.
3. W. Stein, *Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes*. Quellen und Studien zur Gesch. der Math., Phys. und Astron., B, I, 1930, pp. 221-244.
4. *Op. laud.*, p. 293 sq.

ces travaux, ce traité d'Archimède sur les fondements de la statique du levier est considéré comme un des grands textes de l'histoire des mathématiques appliquées.

Le texte de ce traité est établi d'après les manuscrits $\mathcal{L}$, D, E, G, H et les parties conservées, et lisibles, de C.

DE L'ÉQUILIBRE OU DES CENTRES DE GRAVITÉ DES FIGURES PLANES, I

1. Nous demandons que les poids égaux s'équilibrent à des distances égales[1], et que les poids égaux suspendus à des distances inégales ne s'équilibrent pas, mais qu'il y ait inclinaison du côté du poids suspendu à la plus grande distance.

2. Si, des poids suspendus à certaines distances étant en équilibre, on ajoute à l'un des deux poids, les poids ne s'équilibrent plus, mais il y a inclinaison du côté du poids auquel on a ajouté.

3. De même, si on retranche quelque chose à l'un des deux poids, les poids ne s'équilibrent plus, mais il y a inclinaison du côté du poids, duquel on n'a rien retranché.

4. Dans les figures planes égales et semblables, superposables l'une à l'autre, les centres de gravité se superposent eux aussi l'un à l'autre.

5. Dans les figures planes inégales, mais semblables, les centres de gravité seront situés semblablement. Nous appelons semblablement situés dans des figures semblables des points tels que les droites qui les joignent aux sommets des angles égaux font des angles égaux avec les côtés homologues.

6. Si des grandeurs s'équilibrent à certaines distances, des grandeurs équivalentes à ces grandeurs s'équilibreront à leur tour aux mêmes distances.

7. Dans toute figure, dont le périmètre tourne

1. Cette première partie du postulat 1 est citée par Proclus, *In Eucl.* (ed. Friedlein), p. 181, 18.

ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Α′

Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων α′

α′. Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρεα ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος.

β′. Εἴ κα βαρέων ἰσορροπεόντων ἀπό τινων μακέων ποτὶ τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐκεῖνο, ᾧ ποτετέθη.

γ′. Ὁμοίως δὲ καί, εἴ κα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀφαιρεθῇ τι, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος, ἀφ' οὗ οὐκ ἀφῃρέθη.

δ′. Τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλλαλα.

ε′. Τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δέ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐσσεῖται κείμενα. Ὁμοίως δὲ λέγομες σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὁμοῖα σχήματα, ἀφ' ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ποιέοντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς.

ϛ′. Εἴ κα μεγέθεα ἀπό τινων μακέων ἰσορροπέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσορροπήσει.

ζ′. Παντὸς σχήματος, οὗ κα ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ

2 α′ ceterique numeri Heiberg : om. codd. || 8 ἐκεῖνο G : ἐκείνῳ DEH || 11 ἀφ' GH : $\overset{ε}{α}$φ' D ἐφ' E || 18 ποιέοντι Heiberg : ποιόντι E ποιῶντι DGH.

sa concavité du même côté[1], le centre de gravité doit être à l'intérieur de la figure.

Ces principes étant admis (sc. nous démontrerons les propositions)

1.

Les poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux entre eux.

Si, en effet, les poids étaient inégaux, l'excès du plus grand ayant été retranché, les poids restants ne s'équilibreraient plus, puisqu'on aurait retranché quelque chose à l'un de deux poids en équilibre[2]. Il s'ensuit[3] que les poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux.

2.

Les poids inégaux suspendus à des distances égales ne s'équilibrent pas, mais il y a inclinaison du côté du plus grand.

Si on retranche, en effet, l'excédent, les poids s'équilibreront, puisque des poids égaux s'équilibrent à des distances égales[4]. En ajoutant, par conséquent, ce qui a été retranché, il y aura inclinaison du côté du plus grand, puisqu'on a ajouté à l'un de deux poids qui s'équilibrent[5].

3.

Les poids inégaux s'équilibreront à des distances inégales, le plus grand poids se trouvant à la plus petite distance.

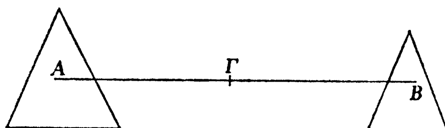


Fig. 31

1-5. Cf. notes compl.

αὐτὰ κοῖλα ᾖ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶμεν δεῖ τοῦ σχήματος.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων

α'.

Τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπέοντα βάρεα ἴσα ἐντί.

Εἴπερ γὰρ ἄνισα ἐσσεῖται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς ὑπεροχᾶς τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται. Ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βάρεα ἰσορροπέοντα ἴσα ἐντί.

β'.

Τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βάρεα οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον.

Ἀφαιρεθείσας γὰρ τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπέοντι. Ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῷ ἑτέρῳ ποτετέθη.

γ'.

Τὰ ἄνισα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπησοῦντι, καὶ τὸ μεῖζον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

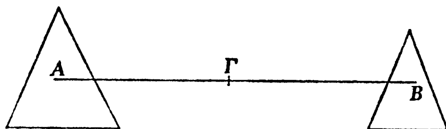


Fig. 31

16 ποτετέθη Heiberg : ποτιτεθῇ DEGH apponitur ℒ.

Soit les poids inégaux A et B, A étant supérieur à B, et qu'ils s'équilibrent aux distances AΓ et ΓB. Il faut démontrer que AΓ est inférieur à ΓB.

Que AΓ ne soit pas inférieur à ΓB. Retranchons l'excédent de A sur B. Puisqu'on a retranché quelque chose à l'un de deux poids qui s'équilibrent[1], il y aura inclinaison du côté (sc. de l'autre poids, à savoir) de B. Mais cette inclinaison ne se produira pas ; car si ΓA est égal à ΓB, les poids s'équilibreront[2], et si ΓA est supérieur à ΓB, il y aura inclinaison du côté de A, parce que les poids égaux à des distances inégales ne s'équilibrent pas, mais il y a inclinaison du côté du poids suspendu à la plus grande distance. Pour cette raison, AΓ est inférieur à ΓB.

Il est évident aussi que les poids qui s'équilibrent à des distances inégales sont inégaux, et que le poids suspendu à la plus petite distance est le plus grand.

4.

Si deux grandeurs égales n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée de ces grandeurs sera le milieu du segment de droite joignant les centres de gravité des grandeurs.

Soit A le centre de gravité de la grandeur A, B celui de la grandeur B, et Γ le milieu du segment de droite AB ; je dis que Γ est le centre (sc. de gravité) de la grandeur composée des deux grandeurs.

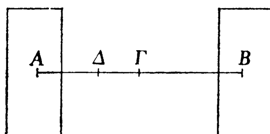


Fig. 32

1. Cf. post. 3.
2. Cf. post. 1.

Ἔστω ἄνισα βάρεα τὰ Α, Β, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ Α, καὶ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μακέων. Δεικτέον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ΑΓ τᾶς ΓΒ.

Μὴ γὰρ ἔστω ἐλάσσων. Ἀφαιρεθείσας δὴ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Β, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ Β. Οὐ ῥέψει δέ· εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ ΓΑ τᾷ ΓΒ, ἰσορροπησοῦντι [τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων], εἴτε μείζων ἁ ΓΑ τᾶς ΓΒ, ῥέπει ἐπὶ τὸ Α· τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. Διὰ δὴ ταῦτα ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ΑΓ τᾶς ΓΒ.

Φανερὸν δὲ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπέοντα ἄνισά ἐντι, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

δ′.

Εἴ κα δύο ἴσα μεγέθεα μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχωντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος.

Ἔστω τοῦ μὲν Α κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Α, τοῦ δὲ Β τὸ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΑΒ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Γ· λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ Γ.

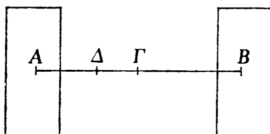


Fig. 32

4 δὴ Heiberg : δὲ DEGH𝔛 ‖ 10 ἐπὶ τὸ add. Torellius ‖ 12 καὶ DEGH om. 𝔛 ‖ 16 ἔχωντι G : ἔχοντι DEGH𝔛.

En effet, si Γ n'est pas (sc. ce centre de gravité), que le centre de gravité de la grandeur composée des grandeurs A et B soit le point Δ, si cela est possible ; on a, en effet, montré antérieurement que ce centre est situé sur la droite AB. Du moment donc que Δ est le centre de gravité de la grandeur composée de A et de B, (sc. cette grandeur) sera en équilibre si le point Δ est fixé ; par conséquent, les grandeurs A et B s'équilibreront aux distances AΔ et ΔB, ce qui est impossible[1], puisque les grandeurs égales ne s'équilibrent pas à des distances inégales. Il est donc évident que le point Γ est le centre de gravité de la grandeur composée des grandeurs A et B.

5.

Si les centres de gravité de trois grandeurs sont situés sur la même droite, si ces grandeurs ont le même poids, et si les segments de droite entre les centres (sc. de gravité) sont égaux, le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des trois grandeurs sera le point qui est aussi le centre de gravité de la grandeur située au milieu.

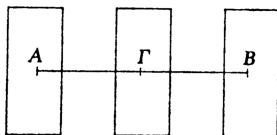


Fig. 33

Soient les trois grandeurs A, B, Γ, ayant pour centres de gravité les points alignés A, B, Γ ; que les grandeurs A, B, Γ soient égales entre elles, et que AΓ soit égal à ΓB ; je dis que le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des (sc. trois) grandeurs est le point Γ.

Comme les grandeurs A et B ont en effet le même poids, le centre de gravité sera le point Γ, puisque

1. Cf. post. 1.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω [τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β μεγεθῶν] κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Δ, εἰ δυνατόν [ὅτι γὰρ ἔστιν ἐπὶ τῆς ΑΒ προδέδεικται]. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου τοῦ Δ ἰσορροπήσει· τὰ ἄρα Α, Β μεγέθεα ἰσορροπησοῦντι ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μακέων· ὅπερ ἀδύνατον [τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι]. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ Γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος.

ε'.

Εἴ κα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

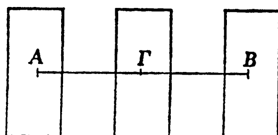


Fig. 33

Ἔστω τρία μεγέθεα τὰ Α, Β, Γ, κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος τὰ Α, Β, Γ σαμεῖα ἐπ' εὐθείας κείμενα, ἔστω δὲ τά τε Α, Β, Γ ἴσα καὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εὐθεῖαι· λέγω ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Γ σαμεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ Α, Β μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον, ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ

5 τοῦ DEGH𝓛 : τὸ H ‖ 7 ἰσορροπέοντι EG : ἰσορροπέωντι DH.

les segments de droite ΑΓ et ΓΒ sont égaux[1]. Mais le point Γ est aussi centre de gravité de la grandeur Γ; il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des trois grandeurs est le même point qui est aussi centre de gravité de la grandeur du milieu.

Corollaire I

Il est clair d'après ce qui précède que pour toute quantité impaire de grandeurs dont les centres de gravité sont alignés et dont celles qui ont la même distance de celle du milieu ont le même poids et qui, de plus, sont disposées de manière que les segments de droite entre les centres de gravité des grandeurs sont égaux[2], le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des grandeurs sera le point qui est aussi centre de gravité de la grandeur du milieu.

Corollaire II

Même lorsque les grandeurs sont en nombre pair, si leurs centres de gravité sont alignés, si les (sc. deux) grandeurs du milieu et celles qui sont équidistantes de celles du milieu ont le même poids, et si les segments de droite entre les centres (sc. de gravité) sont égaux,

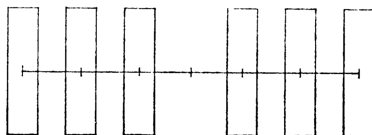


Fig. 34

le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des grandeurs sera le milieu du segment de droite joignant les centres de gravité des grandeurs, comme le montre la figure.

1. Cf. prop. 4.
2. Sc. de part et d'autre de la grandeur du milieu.

ΑΓ, ΓΒ. Ἔστιν δὲ καὶ τοῦ Γ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α′

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν ὅτι, ὁπόσων κα τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, εἴ κα τά τε ἴσον ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β′

Εἴ κα καὶ ἄρτια ἔωντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μέσα αὐτῶν καὶ τὰ ἴσα ἀπέχοντα ἀπ' αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι

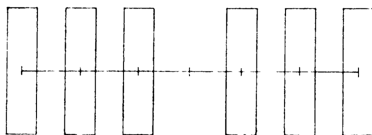


Fig. 34

ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μεγεθέων, ὡς ὑπογέγραπται.

2 οὖν G : om. DEH𝔛 ‖ 9-10 τῶν κέντρων Torellius : τοῦ κέντρου codd. ‖ 16 καὶ τὰ ἴσα ἀπέχοντα ἀπ' αὐτῶν add. Heiberg ‖ 17 ἔχωντι G𝔛 : ἔχοντι DEH.

6.

Des grandeurs commensurables s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids.

Soit les grandeurs commensurables A et B, A et B leurs centres (sc. de gravité) ; soit, de plus, une longueur EΔ, et que la longueur ΔΓ soit à la longueur ΓE comme A est à B. Il faut démontrer que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A et B est le point **Γ**.

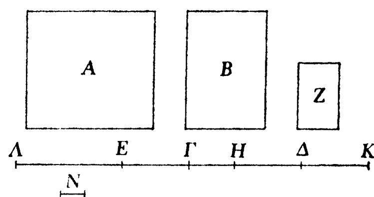


Fig. 35

Du moment, en effet, que ΔΓ est à ΓE comme A est à B, et que A et B sont commensurables, il s'ensuit que les deux segments de droite ΓΔ et ΓE sont à leur tour commensurables. Soit N leur commune mesure. Donnons-nous les deux segments de droite ΔH et ΔK égaux, chacun, à EΓ, et le segment de droite EΛ égal à ΔΓ. Puisque ΔH est égal à ΓE, ΔΓ est égal à EH, de manière que ΛE est aussi égal à EH. Par conséquent ΛH est double de ΔΓ, et HK double de ΓE. Par conséquent N mesure aussi chacun des segments de droite ΛH et HK, puisque N mesure leurs moitiés[1]. Et puisque, d'une part, ΔΓ est à ΓE comme A est à B, et que, d'autre part, ΛH est à HK comme ΔΓ est à ΓE, — chacun des premiers segments est en effet double de chacun des seconds —, le rapport de ΛH à

1. Cf. Eucl. X, 12.

ϛ′.

Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ Α, Β, ὧν κέντρα τὰ Α, Β, καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ μᾶκος ποτὶ τὸ ΓΕ μᾶκος · δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Γ.

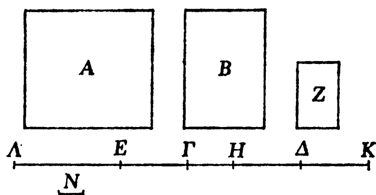


Fig. 35

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ ποτὶ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον, καὶ τὸ ΓΔ ἄρα τῷ ΓΕ σύμμετρον, τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ · ὥστε τῶν ΕΓ, ΓΔ ἐστὶ κοινὸν μέτρον. Ἔστω δὴ τὸ Ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ΕΓ ἴσα ἑκατέρα τᾶν ΔΗ, ΔΚ, τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἁ ΕΛ. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ ΔΗ τᾷ ΓΕ, ἴσα καὶ ἁ ΔΓ τᾷ ΕΗ · ὥστε καὶ ἁ ΛΕ ἴσα τᾷ ΕΗ. Διπλασία ἄρα ἁ μὲν ΛΗ τᾶς ΔΓ, ἁ δὲ ΗΚ τᾶς ΓΕ · ὥστε τὸ Ν καὶ ἑκατέραν τᾶν ΛΗ, ΗΚ μετρεῖ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτᾶν. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ ΔΓ ποτὶ ΓΕ, ὡς δὲ ἁ ΔΓ ποτὶ ΓΕ, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ · διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας ·

2 ἰσορροπέοντι EG : ἰσορροπέωντι DH ‖ 2-3 ἀντιπεπονθότως Torellius : ἀντιπεπονθότων codd. ‖ 5 τι om. ℒ ‖ 16 καὶ om. ℒ | ἑκατέραν Torellius : ἑκάτερον codd.

HK est lui aussi égal au rapport de A à B. Que A contienne autant de fois la grandeur Z que ΛH contient N. Il s'ensuit[1] que ΛH est à N comme A est à Z. Mais KH est aussi[2] à ΛH comme B est à A. Par identité[3] donc, KH est à N comme B est à Z. Par conséquent, B est un multiple de Z autant de fois que KH est un multiple de N. Mais on a montré que A est lui aussi un multiple de Z, de façon que Z est une commune mesure de A et de B. Si maintenant le segment ΛH est divisé en parties égales à N, et la grandeur A en parties égales à Z, les segments égaux à N, contenus dans le segment ΛH, seront en même nombre que les grandeurs partielles, égales à Z, contenues dans la grandeur A. Par conséquent, si on place sur chacun des segments de ΛH une grandeur égale à Z ayant son centre de gravité au milieu du segment, la somme de ces grandeurs est égale à la grandeur A, et le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes ces grandeurs partielles sera le point E ; toutes ces grandeurs sont, en effet, en nombre pair, et il y en a le même nombre de part et d'autre de E, puisque le segment ΛE est égal au segment HE. On démontrera de la même manière que, même si sur chacun des segments partiels du segment KH on place une grandeur égale à Z, ayant son centre de gravité au milieu du segment, la somme de ces grandeurs partielles sera égale à B, et que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes ces grandeurs partielles sera le point Δ[4]. La grandeur A sera donc placée au point E, la grandeur B au point Δ. On aura donc des grandeurs égales entre elles, dont les centres de gravité sont également distants entre eux et qui sont placées en nombre pair sur un segment de droite. Il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes ces grandeurs est le milieu du

1. Cf. Eucl. V, def. 5.
2. Cf. Eucl. V, 7, coroll.
3. Cf. Eucl. V, 22.
4. Du moment que Z mesure la grandeur B ; cf. prop. 5, coroll. 2.

καὶ ὡς ἄρα τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ. Ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ ΛΗ τᾶς Ν, τοσαυταπλασίων ἔστω καὶ τὸ Α τοῦ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΛΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Α ποτὶ Ζ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ ΛΗ, οὕτως τὸ Β ποτὶ Α· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Β ποτὶ Ζ· ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ ΚΗ τᾶς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. Ἐδείχθη δὲ τοῦ Ζ καὶ τὸ Α πολλαπλάσιον ἐόν· ὥστε τὸ Ζ τῶν Α, Β κοινόν ἐστι μέτρον. Διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν ΛΗ εἰς τὰς τᾷ Ν ἴσας, τοῦ δὲ Α εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ ΛΗ τμάματα ἰσομεγέθεα τᾷ Ν ἴσα ἐσσεῖται τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν τῷ Ζ. Ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ ΛΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ Α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Ε· ἀρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε ἴσα τῷ πλήθει διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν τὰν ΛΕ τᾷ ΗΕ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι κἄν, εἴ κα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ ΚΗ τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ Β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ Δ· ἐσσεῖται οὖν τὸ μὲν Α ἐπικείμενον κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β κατὰ τὸ Δ. Ἐσσεῖται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλάλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλάλων διέστακεν, [συγκείμενα] ἄρτια τῷ πλήθει· δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς

1-2 ὁσαπλασίων δέ DEGH : et quotupla 𝔏 || 6 ἰσάκις DEGH : quotiens 𝔏 || 7 καὶ om. 𝔏 || πολλαπλάσιον EGH : πολλαπλασίων D || 9 τᾷ Basil. : τῷ G om. DEH || τοῦ δὲ Α mss. DEGH et a ms. 𝔏 || 10 ἴσα GH : ἴσου DE || 13 τῷ EG : τὸ DH || 17 καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε ἴσα τῷ πλήθει add. Heiberg || 26 συγκείμενα codd. : del. Heiberg.

segment de droite qui contient les centres des grandeurs du milieu[1]. Mais puisque le segment de droite ΛE est égal au segment ΓΔ, et le segment EΓ égal au segment ΔK, le segment entier ΛΓ est égal au segment ΓK. Il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes les grandeurs partielles est le point Γ. Par conséquent, la grandeur A, placée au point E, et la grandeur B, placée au point Δ, s'équilibreront au point Γ.

7.

De la même manière aussi, si les grandeurs sont incommensurables, elles s'équilibreront à des distances inversement proportionnelles aux grandeurs.

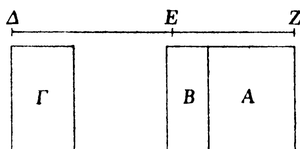


Fig. 36

Soient les grandeurs incommensurables AB et Γ et les distances ΔE et EZ ; que le rapport de AB à Γ soit égal au rapport de la distance EΔ à la distance EZ ; je dis que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs[2] AB et Γ est le point E.

Car si AB, placé au point Z, ne fait pas équilibre à Γ, placé au point Δ, la grandeur AB sera ou bien trop grande par rapport à la grandeur Γ pour qu'il y ait équilibre, ou elle ne sera pas trop grande. Qu'elle soit trop grande, et que soit retranchée de AB une grandeur inférieure à cet excédent de AB sur Γ qui empêche l'équilibre et telle que la grandeur restante A soit commensurable avec Γ. Du moment donc que les grandeurs A et Γ sont commensurables, et que le

1. D'après prop. 5, coroll. 2.
2. Avec l'hypothèse sous-entendue que AB soit placé sur Z, et Γ sur Δ.

ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. Ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν ΛΕ τᾷ ΓΔ, ἁ δὲ ΕΓ τᾷ ΔΚ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΛΓ ἴσα τᾷ ΓΚ· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον. Τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου κατὰ τὸ Ε, τοῦ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ Γ.

ζʹ.

Καὶ τοίνυν, εἴ κα ἀσύμμετρα ἔωντι τὰ μεγέθεα, ὁμοίως ἰσορροπησοῦντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν.

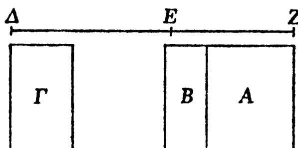


Fig. 36

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ ΑΒ, Γ, μάκεα δὲ τὰ ΔΕ, ΕΖ, ἐχέτω δὲ τὸ ΑΒ ποτὶ τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ ΕΔ ποτὶ τὸ ΕΖ μᾶκος· λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, Γ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε.

Εἰ γὰρ μὴ ἰσορροπήσει τὸ ΑΒ τεθὲν ἐπὶ τῷ Ζ τῷ Γ τεθέντι ἐπὶ τῷ Δ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν [τῷ Γ] ἢ οὔ. Ἔστω μεῖζον, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν, ὥστε [τὸ] λοιπὸν τὸ Α σύμμετρον εἶμεν τῷ Γ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Γ μεγέθεα,

8 ἀντιπεπονθότως Basil. : ἀντιπεπονθότων codd. || 15 τῷ G : τὸ DEH || ἢ G : om. DEH𝔅 || 16 τῷ Γ om. Eutocius || 17 μεῖζόν G : μείζων DEH || ἢ G : om. DEH𝔅 || 18 τὸ pr. DEGH : om. Eutocius || 19 τῷ GH𝔅 : τὸ DE.

rapport de A à Γ est inférieur au rapport du segment de droite ΔE au segment EZ, les grandeurs A et Γ ne s'équilibreront pas[1] aux distances ΔE et EZ si la grandeur A est placée[2] au point Z et la grandeur Γ au point Δ. Pour les mêmes raisons, il n'y aura pas d'équilibre non plus, si la grandeur Γ est trop grande pour équilibrer la grandeur AB.

8.

Si on retranche d'une certaine grandeur une grandeur n'ayant pas le même centre (sc. de gravité) que le tout, le centre de gravité de la grandeur qui reste est l'extrémité du segment de droite découpé du prolongement, du côté du centre de la grandeur entière, de la droite joignant les centres de gravité de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, et découpé de manière que le rapport de ce segment au segment de droite entre les centres est égal au rapport du poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante[3].

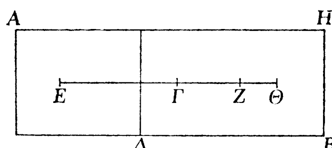


Fig. 37

Soit Γ le centre de gravité d'une grandeur AB ; retranchons de la grandeur AB la grandeur AΔ, et soit E le centre de gravité de AΔ ; menons la droite EΓ et retranchons de son prolongement (sc. vers Γ) le segment ΓZ de manière que le rapport de ΓZ à ΓE

1. Cf. prop. 6.

2. Du moment que $\frac{A}{\Gamma} < \frac{\Delta E}{EZ}$ il y a inclinaison du côté de Δ, ce qui est impossible, puisque la grandeur retranchée de AB est trop petite pour que le reste, c'est-à-dire A, puisse équilibrer Γ.

3. Proposition citée dans le traité *Des corps flottants*, II, 2.

καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ Α ποτὶ τὸ Γ ἢ ἁ ΔΕ ποτὶ ΕΖ, οὐκ ἰσορροπησοῦντι τὰ Α, Γ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν Α ἐπὶ τῷ Ζ, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τῷ Δ. Διὰ ταὐτὰ δ', οὐδ' εἰ τὸ Γ μεῖζόν ἐστιν ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ ΑΒ.

η′.

Εἴ κα ἀπό τινος μεγέθεος ἀφαιρεθῇ τι μέγεθος μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεος, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ [τᾶς] ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὰν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος ποτὶ τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας.

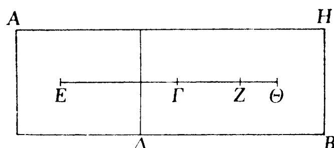


Fig. 37

Ἔστω μεγέθεός τινος τοῦ ΑΒ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΑΒ τὸ ΑΔ, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ Ε, ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς ΕΓ καὶ ἐκβληθείσας ἀπολελάφθω ἁ ΓΖ ποτὶ τὰν ΓΕ λόγον ἔχουσα τὸν αὐτόν,

1 Γ ἢ G𝔛 : ΓΗ mss. DEH ‖ 3 τῷ utr. G : τὸ DEH ‖ ταὐτὰ DEGH : hoc 𝔛 ‖ 4 μεῖζόν ἐστιν DEGH : sit maius 𝔛 ‖ τῷ G𝔛 : τὸ DEH ‖ AB Torellius : A codd. ‖ 10 ἃ Heiberg : ὃ codd. ‖ 11 τᾶς DEGH : del. Heiberg ‖ 14 τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος 𝔛 : τῶν ἀφῃρημένων μεγεθέων DEGH.

soit égal au rapport de la grandeur ΑΔ à la grandeur ΔΗ ; il faut démontrer que le centre de gravité de la grandeur ΔΗ est le point Z.

En effet, que ce centre ne soit pas Z, mais le point Θ. Du moment donc que la grandeur ΑΔ a pour centre de gravité le point E, et la grandeur ΔΗ le point Θ, le centre de gravité de la grandeur composée des grandeurs ΑΔ et ΔΗ sera sur le segment de droite EΘ, coupé de manière que ses segments partiels aient entre eux le rapport inverse des grandeurs[1] ; par conséquent[2] le point Γ ne sera pas situé à l'endroit que lui assigne la division correspondant à celle que nous venons d'indiquer. Le point Γ n'est donc pas le centre (sc. de gravité) de la grandeur composée des grandeurs ΑΔ, ΔΗ, c'est-à-dire de la grandeur AB. Mais il l'est par hypothèse ; il s'ensuit que Θ n'est pas le centre de gravité de la grandeur ΔΗ.

9.

Dans tout parallélogramme le centre de gravité est situé sur la droite joignant les milieux des côtés opposés du parallélogramme.

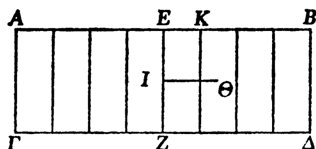


Fig. 38

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, et EZ la droite joignant les milieux des côtés AB et ΓΔ. Je dis que le centre de gravité du parallélogramme ΑΒΓΔ sera situé sur la droite EZ.

1. Cf. prop. 6 et 7.
2. Cf. notes compl.

ὃν ἔχει τὸ ΑΔ μέγεθος ποτὶ τὸ ΔΗ · δεικτέον ὅτι τοῦ ΔΗ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ζ σαμεῖον.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ σαμεῖον. Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν ΑΔ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε, τοῦ δὲ ΔΗ τὸ Θ σαμεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΔ, ΔΗ μεγεθέων κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΘ τμαθείσας, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθέμεν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν · ὥστε οὐκ ἐσσεῖται τὸ Γ σαμεῖον κατὰ τὰν ἀνάλογον τομὰν τᾷ εἰρημένᾳ. Οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ Γ κέντρον τοῦ ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΗ συγκειμένου μεγέθεος, τουτέστι τοῦ ΑΒ. Ἔστι δέ · ὑπέκειτο γάρ · οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ Θ κέντρον βάρεος τοῦ ΔΗ μεγέθεος.

θ′.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶν κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευρᾶν.

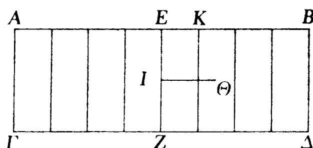


Fig. 38

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἐπὶ δὲ τὰν διχοτομίαν τᾶν ΑΒ, ΓΔ ἁ ΕΖ · φαμὶ δὴ ὅτι τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΖ.

5 ἀμφοτέρων G𝔛 : ἀμφοτέρου DEH ‖ 7 αὐτᾶς DEGH : om. 𝔛 ‖ ἀντιπεπονθέμεν Heiberg : ἀντιπεποθεν μὲν DH ἀντιπέπονθε μὲν EG ‖ 16 τᾶν Torellius : τᾶς codd. ‖ πλευρᾶν Torellius : πλευρᾶς codd.

Qu'il n'en soit pas ainsi, mais que le centre de gravité soit, si possible, le point Θ. Menons la droite ΘI parallèlement à AB. Le segment de droite EB étant continuellement divisé en deux parties égales, il arrivera un moment où le segment restant sera inférieur à IΘ. Que chacun des deux segments de droite AE et EB soit divisé en segments partiels égaux au segment EK (sc. inférieur à IΘ). Menons par les points de division les parallèles à EZ. Le parallélogramme entier sera ainsi divisé en parallélogrammes égaux et semblables au parallélogramme KZ. Ces parallélogrammes égaux et semblables à KZ s'appliquant l'un sur l'autre, leurs centres de gravité coïncideront à leur tour[1]. Il y aura donc : certaines grandeurs, des parallélogrammes égaux à KZ, en nombre pair ; leurs centres de gravité situés sur une droite ; les grandeurs du milieu égales. Toutes les grandeurs, de plus, de part et d'autre des grandeurs du milieu, sont égales, et les segments de droite compris entre les centres sont égaux. Il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de tous ces parallélogrammes sera situé sur la droite joignant les centres de gravité des aires du milieu[2]. Mais ceci n'est pas le cas, puisque le point Θ est situé en dehors des parallélogrammes du milieu[3]. Il est donc évident que le centre de gravité du parallélogramme ΑΒΓΔ est situé sur la droite EZ.

10.

Dans tout parallélogramme le centre de gravité est le point de rencontre des diagonales.

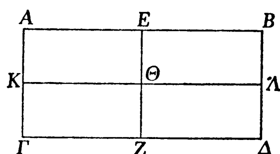


Fig. 39

1-3. Cf. notes compl.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΒ ἁ ΘΙ. Τᾶς [δὲ] δὴ ΕΒ διχοτομουμένας αἰεὶ ἐσσεῖταί ποκα ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ΙΘ· καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τᾶν ΑΕ, ΕΒ εἰς τὰς τᾷ ΕΚ ἴσας, καὶ ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσιας σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν ΕΖ· διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὁμοῖα τῷ ΚΖ. Τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων τῷ ΚΖ ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. Ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεά τινα, παραλληλόγραμμα ἴσα τῷ ΚΖ, ἄρτια τῷ πλήθει, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα, καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων αὐτά τε ἴσα ἐντὶ καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι· τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μέσων χωρίων. Οὐκ ἔστι δέ· τὸ γὰρ Θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. Φανερὸν οὖν ὅτι ἐπὶ τᾶς ΕΖ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου.

ι'.

Παντὸς παραλληλογραμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτοντι.

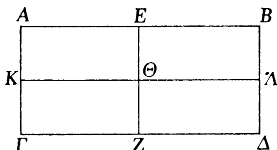


Fig. 39

2 δὲ DEGH : om. 𝔛 del. Heiberg ‖ 3 ποκα Torellius : ποια codd. ‖ ἁ G : om. DEH𝔛 ‖ 8-9 ἐφαρμοζομένων G𝔛 : ἐφαρμοζόμενον DEH ‖ 9 αὐτῶν G𝔛 : αὐτοῦ DEH.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, et dans ce parallélogramme la droite EZ divisant les côtés AB et ΓΔ en deux parties égales, et la droite ΚΛ divisant les côtés ΑΓ et ΒΔ. Le centre de gravité du parallélogramme ΑΒΓΔ est donc situé sur la droite EZ, puisque cela a été démontré[1]. Mais pour les mêmes raisons il est aussi situé sur la droite ΚΛ. Il s'ensuit que le point Θ est le centre de gravité. Or c'est au point Θ que se rencontrent les diagonales du parallélogramme, de façon que la proposition est démontrée.

Autre démonstration

Mais il est possible de démontrer la même proposition encore d'une autre manière.

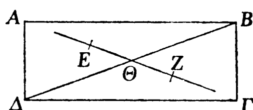


Fig. 40

Soit ΑΒΓΔ un parallélogramme, et ΔΒ une de ses diagonales ; les triangles ΑΒΔ et ΒΔΓ sont donc égaux et semblables entre eux ; si ces triangles sont appliqués l'un sur l'autre, leurs centres de gravité coïncideront donc à leur tour. Soit E le centre de gravité du triangle ΑΒΔ ; divisons ΔΒ en deux parties égales au point Θ, menons EΘ et prenons sur le prolongement de EΘ le segment ZΘ égal à ΘE. Si maintenant le triangle ΑΒΔ est appliqué sur le triangle ΒΔΓ, le côté AB étant posé sur ΔΓ, le côté ΑΔ sur ΒΓ, le segment ΘE s'appliquera à son tour sur ZΘ, et le point E coïncidera avec le point Z. Mais il coïncidera

1. Cf. prop. 9.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἐν αὐτῷ ἁ ΕΖ δίχα τέμνουσα τὰς ΑΒ, ΓΔ, ἁ δὲ ΚΛ τὰς ΑΓ, ΒΔ· ἔστιν δὴ τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΕΖ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· διὰ ταὐτὰ δὲ καὶ ἐπὶ τᾶς ΚΛ· τὸ Θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεος. Κατὰ δὲ τὸ Θ αἱ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου συμπίπτοντι· ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.

ΑΛΛΩΣ

Ἔστιν δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι.

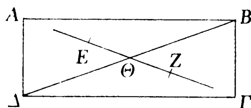


Fig. 40

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ ΔΒ. Τὰ ἄρα ΑΒΔ, ΒΔΓ τρίγωνα ἴσα ἐντὶ καὶ ὁμοῖα ἀλλάλοις· ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα τῶν τριγώνων καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. Ἔστω δὴ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον, καὶ τετμάσθω δίχα ἁ ΔΒ κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΕΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΖΘ ἴσα τᾷ ΘΕ. Ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον καὶ τιθεμένας τᾶς μὲν ΑΒ πλευρᾶς ἐπὶ τὰν ΔΓ, τᾶς δὲ ΑΔ ἐπὶ τὰν ΒΓ, ἐφαρμόξει καὶ ἁ ΘΕ εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ΖΘ, καὶ τὸ Ε σαμεῖον ἐπὶ τὸ Ζ πεσεῖται.

4 ταὐτὰ DEGH : hoc ꝶ ‖ 7 συμπίπτοντι ꝶ : πίπτοντι DEGH ‖ 12 ἐφαρμοζομένων Gꝶ : ἐφαρμοζόμενον DEH ‖ 15-16 τετμάσθω δίχα ἁ ΔΒ κατὰ τὸ Θ, καὶ Basil. : secetur in duo quae db penes t et ꝶ om. DEGH ‖ 17 ΑΒΔ mss. Gꝶ : ΑΒΔΓ mss. DEH ‖ 18 ΒΔΓ Basil. : dbg ms. ꝶ ΑΔΓ mss. DEGH ‖ 19 ἐφαρμόξει Heiberg : ἐφαρμόζει codd.

ainsi aussi avec le centre de gravité du triangle ΒΔΓ[1]. Du moment donc que E est le centre de gravité du triangle ΑΒΔ, et Z le centre de gravité du triangle ΔΒΓ, il est évident que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux triangles est le milieu du segment de droite EZ[2], à savoir le point Θ.

11.

Deux triangles semblables étant donnés, et dans ces triangles des points semblablement situés par rapport aux triangles, si l'un de ces points est centre de gravité du triangle dans lequel il est situé, l'autre point est lui aussi centre de gravité du triangle dans lequel il est situé. Nous appelons semblablement situés par rapport à des figures semblables des points tels que les droites qui les joignent aux sommets des angles égaux font des angles égaux avec les côtés homologues[3].

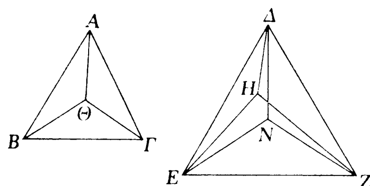


Fig. 41

Soit les deux triangles ΑΒΓ et ΔΕΖ, et que ΑΓ soit à ΔΖ comme ΑΒ est à ΔΕ et comme ΒΓ est à ΕΖ[4] ; soit Θ et N deux points semblablement situés par rapport aux triangles indiqués ΑΒΓ et ΔΕΖ, et soit Θ le centre de gravité du triangle ΑΒΓ ; je dis que le point N est centre de gravité du triangle ΔΕΖ.

1. Cf. post. 4. A cet endroit, il manque la conclusion : « le point Z est ainsi le centre de gravité du triangle ΒΔΓ. » Heiberg propose de compléter le texte par : τὸ Ζ ἄρα κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τοῦ ΒΔΓ τριγώνου.

2-4. Cf. notes compl.

Ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον, τοῦ δὲ ΔΒΓ τὸ Ζ, δῆλον ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ μέσον τᾶς ΕΖ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ τὸ Θ σαμεῖον.

ια′.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἀλλάλοις ᾖ καὶ ἐν αὐτοῖς σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ποτὶ τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἓν σαμεῖον τοῦ ἐν ᾧ ἐστι τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος, καὶ τὸ λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐν ᾧ ἐστι τριγώνου [ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὁμοῖα σχήματα, ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσας ποιοῦσιν γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς].

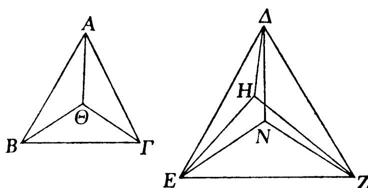


Fig. 41

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ὡς ἁ ΑΓ ποτὶ ΔΖ, οὕτως ἅ τε ΑΒ ποτὶ ΔΕ καὶ ἁ ΒΓ ποτὶ ΕΖ, καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ Θ, Ν [πρὸς τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα], καὶ ἔστω τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου · λέγω ὅτι καὶ τὸ Ν κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ ΔΕΖ τριγώνου.

1 ΒΔΓ ms. G : dbg ms. ϰ ΑΔΓ mss. DEH ‖ 2 τὸ G : τοῦ DEH.

Qu'il n'en soit pas ainsi, et que le centre de gravité du triangle ΔEZ soit le point H. Menons les droites ΘA, ΘB, ΘΓ, ΔN, EN, ZN, ΔH, EH, ZH. Du moment donc que le triangle ABΓ est semblable au triangle ΔEZ, et que les centres de gravité sont les points Θ et H, que, de plus, les centres de gravité de figures semblables sont semblablement situés, de façon que les droites qui les joignent aux sommets font des angles égaux avec les côtés homologues, chacune avec chacun[1], l'angle HΔE est égal à l'angle ΘAB[2]. Mais l'angle ΘAB est égal à l'angle EΔN[2] en vertu de la situation semblable des points Θ et N ; il s'ensuit que l'angle EΔN est lui aussi égal à l'angle EΔH, c'est-à-dire qu'un angle plus grand est égal à un angle plus petit, ce qui est impossible. Le point N ne saurait donc ne pas être le centre de gravité du triangle ΔEZ ; N est donc centre de gravité.

12.

Deux triangles semblables étant donnés, si le centre de gravité de l'un est situé sur la droite menée d'un des sommets au milieu de la base (sc. du côté opposé), le centre de gravité de l'autre triangle sera également situé sur la droite menée semblablement.

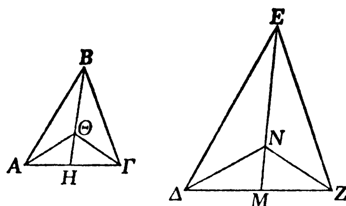


Fig. 42

1. Cette consécutive est considérée comme une interpolation par Heiberg.
2. Cf. post. 5.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Η κέντρον βάρεος τοῦ ΔΕΖ τριγώνου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, ΔΝ, ΕΝ, ΖΝ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν ὁμοῖόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐστὶ τὰ Θ, Η σαμεῖα, τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντὶ κείμενα [ὥστε ἴσας ποιησοῦντι γωνίας ποτὶ ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς ἕκαστον ἑκάσταις], ἴσα ἄρα ἁ ὑπὸ ΗΔΕ γωνία τᾷ ὑπὸ ΘΑΒ. Ἀλλὰ ἁ ὑπὸ ΘΑΒ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΕΔΝ [διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ Θ, Ν σαμεῖα]· καὶ ἁ ὑπὸ ΕΔΝ γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΕΔΗ, ἁ μείζων τᾷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα οὐκ ἔστι κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΔΕΖ τριγώνου τὸ Ν σαμεῖον· ἔστιν ἄρα.

ιβ′.

Εἴ κα δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἔωντι, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐντι ἀπό τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν τὰν βάσιν ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας γραμμᾶς.

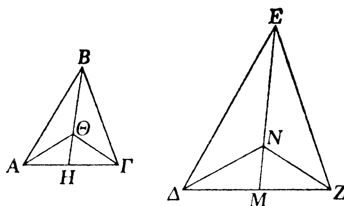


Fig. 42

8 ἄρα DEGH : est ergo ℒ ‖ 9 ΕΔΝ ms. ℒ : ΕΔΗ mss. DEGH ‖ 10 ΕΔΝ Heiberg : ΕΔΗ codd. ‖ 11 ΕΔΗ Heiberg : ΕΔΝ codd. ‖ 12 N mss. DEGH : h ms. ℒ ‖ 16 τινος DEGH : om. ℒ.

Soit les deux triangles ΑΒΓ et ΔΕΖ ; que ΑΓ soit à ΔΖ comme ΑΒ est à ΔΕ et comme ΒΓ est à ΖΕ[1] ; divisons le côté ΑΓ en deux parties égales au point Η et menons la droite ΒΗ ; que le centre de gravité du triangle ΑΒΓ, soit Θ, soit situé sur ΒΗ ; je dis que, aussi pour le triangle ΕΔΖ, le centre de gravité est situé sur la droite menée semblablement.

Divisons ΔΖ en deux parties égales au point Μ, menons ΕΜ et (sc. prenons sur ΕΜ un point Ν de manière) que ΒΗ soit à ΒΘ comme ΜΕ est à ΕΝ ; menons les droites ΑΘ, ΘΓ, ΔΝ, ΝΖ. Puisque ΑΗ est la moitié de ΓΑ et ΔΜ la moitié de ΔΖ, on a aussi l'égalité entre le rapport de ΒΑ à ΕΔ et le rapport de ΑΗ à ΔΜ. Les côtés comprenant des angles égaux[2] sont, de plus, proportionnels ; il s'ensuit que l'angle ΑΗΒ est égal[3] à l'angle ΔΜΕ et que ΑΗ est à ΔΜ comme[4] ΒΗ est à ΕΜ. Mais on a aussi ΒΗ à ΒΘ comme ΜΕ à ΕΝ ; par identité, le rapport de ΑΒ à ΔΕ est donc égal[5] au rapport de ΒΘ à ΕΝ. Les côtés comprenant des angles égaux sont, de plus, proportionnels ; dans ces conditions, l'angle ΒΑΘ est égal à l'angle ΕΔΝ ; par conséquent l'angle ΘΑΓ qui reste[6] est égal à l'angle ΝΔΖ. Mais pour les mêmes raisons l'angle ΒΓΘ est égal à l'angle ΕΖΝ, et l'angle ΘΓΗ égal à l'angle ΝΖΜ. Comme on avait montré qu'aussi l'angle ΑΒΘ est égal à l'angle ΔΕΜ, l'angle ΘΒΓ qui reste est égal[7] à son tour à l'angle ΝΕΖ. Pour toutes ces raisons, les points Θ et Ν sont semblablement situés, comme faisant des angles égaux avec les côtés homologues. Du moment donc que les points Θ et Ν sont semblablement situés et que Θ est le centre de gravité du triangle ΑΒΓ, le point Ν, lui aussi, est centre de gravité du triangle ΔΕΖ.

1. Cf. Eucl. VI, 4.
2. Sc. les angles ΒΑΗ et ΕΔΜ, égaux en vertu de la similitude des triangles ΑΒΓ et ΔΕΖ.
3. Cf. Eucl. VI, 6.
4. Cf. Eucl. VI, 4.
5-7. Cf. notes compl.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ὡς ἁ ΑΓ ποτὶ ΔΖ, οὕτως ἅ τε ΑΒ ποτὶ ΔΕ καὶ ἁ ΒΓ ποτὶ ΖΕ, καὶ τμαθείσας τᾶς ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η ἐπεζεύχθω ἁ ΒΗ, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τᾶς ΒΗ τὸ Θ· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΕΔΖ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας εὐθείας.

Τετμάσθω ἁ ΔΖ δίχα κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΕΜ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἁ ΒΗ ποτὶ ΒΘ, οὕτως ἁ ΜΕ ποτὶ ΕΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΘΓ, ΔΝ, ΝΖ. Ἐπεί ἐστι τᾶς μὲν ΓΑ ἡμίσεια ἁ ΑΗ, τᾶς δὲ ΔΖ ἡμίσεια ἁ ΔΜ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἁ ΒΑ ποτὶ ΕΔ, οὕτως ἁ ΑΗ ποτὶ ΔΜ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι· ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἁ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία τᾷ ὑπὸ ΔΜΕ, καί ἐστιν ὡς ἁ ΑΗ ποτὶ ΔΜ, οὕτως ἁ ΒΗ ποτὶ ΕΜ. Ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἁ ΒΗ ποτὶ ΒΘ, οὕτως ἁ ΜΕ ποτὶ ΕΝ· καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ ΔΕ, οὕτως ἁ ΒΘ ποτὶ ΕΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι· εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶν ἁ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τᾷ ὑπὸ ΕΔΝ· ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ ΘΑΓ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΝΔΖ γωνίᾳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἁ μὲν ὑπὸ ΒΓΘ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΕΖΝ, ἁ δὲ ὑπὸ ΘΓΗ τᾷ ὑπὸ ΝΖΜ ἴσα. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ὑπὸ ΑΒΘ τᾷ ὑπὸ ΔΕΜ ἴσα· ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ ΘΒΓ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΝΕΖ. Διὰ ταῦτα δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ Θ, Ν σαμεῖα [ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας γωνίας ποιεῖ]. Ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ Θ, Ν σαμεῖα, καί ἐστι τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ τὸ Ν ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ ΔΕΖ.

5 τὸ alt. addidi || 9 ΑΘ Basil. : ΒΘ codd. || ΔΝ ms. ℒ : ΔΗ mss. DEGH || ΝΖ ms. ℒ : ΗΖ mss. DEGH || 11 ΑΗ mss. DGℒ : ΑΝ mss. EH || 18 ἁ add. Heiberg || 23 ταῦτα Torellius : τὰ αὐτὰ DEGH hoc ℒ || 24 ἴσας DEHℒ : καὶ ἴσας G.

13.

Dans tout triangle, le centre de gravité est situé sur la droite menée d'un sommet au milieu du côté opposé.

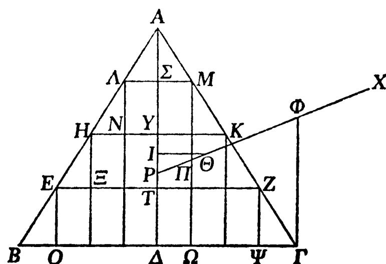


Fig. 43

Soit le triangle ΑΒΓ et dans ce triangle la droite ΑΔ menée (sc. du sommet Α) au milieu du côté ΒΓ ; il faut démontrer que le centre de gravité du triangle ΑΒΓ est situé sur la droite ΑΔ.

Qu'il n'en soit pas ainsi, mais que le centre de gravité soit le point Θ, si possible ; menons par Θ la parallèle ΘΙ à ΒΓ. Si, dès lors, le segment ΔΓ est continuellement divisé en deux parties égales, il arrivera un moment où le segment de reste sera inférieur à ΘΙ ; divisons chacun des segments ΒΔ et ΔΓ en parties égales (sc. à ce reste), menons par les points de division des parallèles à ΑΔ et menons les droites ΕΖ, ΗΚ et ΛΜ, qui seront alors parallèles à ΒΓ. Dès lors, le centre de gravité est, dans le parallélogramme ΜΝ sur la droite ΥΣ, dans le parallélogramme ΚΞ sur ΤΥ, dans le parallélogramme ΖΟ sur ΤΔ[1] ; il s'ensuit que dans la grandeur composée de tous ces parallélogrammes le centre de gravité est sur la droite[2] ΣΔ.

1. Cf. prop. 9.
2. Cf. prop. 4.

ιγ′.

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἐκ τᾶς γωνίας ἐπὶ μέσαν ἀγομένα τὰν βάσιν.

Fig. 43

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ ἁ ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ βάσιν· δεικτέον ὅτι ἐπὶ τᾶς ΑΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν ΒΓ ἄχθω ἁ ΘΙ. Ἀεὶ δὴ δίχα τεμνομένας τᾶς ΔΓ ἐσσεῖταί ποκα ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ΘΙ· καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τᾶν ΒΔ, ΔΓ ἐς τὰς ἴσας, καὶ διὰ τᾶν τομᾶν παρὰ τὰν ΑΔ ἄχθωσαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΚ, ΛΜ· ἐσσοῦνται δὴ αὗται παρὰ τὰν ΒΓ. Τοῦ δὴ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν ΜΝ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΥΣ, τοῦ δὲ ΚΞ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΤΥ, τοῦ δὲ ΖΟ ἐπὶ τᾶς ΤΔ· τοῦ ἄρα ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ

3 μέσαν ἀγομένα G𝓛 : μέσα ἀναγομένα DEH ‖ 8 δι' αὐτοῦ 𝓛 : διὰ τοῦ DEH διὰ τοῦ Θ ms. G ‖ 10 ποκα G𝓛 : ἄποκα DEH ‖ ΘΙ mss. G𝓛 : ΘΙΕ mss. DEH ‖ 14 ΜΝ mss. DEGH : mh ms. 𝓛 ‖ 16 ΖΟ mss. G𝓛 : ΖΘ mss. DEH.

Que ce centre soit le point P ; joignons P à Θ, prolongeons PΘ et menons ΓΦ parallèlement à ΑΔ. Le rapport du triangle ΑΔΓ à la somme des triangles construits sur AM, MK, KZ, ZΓ, semblables au triangle ΑΔΓ, est donc égal[1] au rapport de ΓΑ à AM, en vertu de l'égalité des segments AM, MK, ZΓ, KZ. Mais puisque, d'autre part, le rapport du triangle ΑΔΒ à la somme des triangles semblables construits sur ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ est égal au rapport de ΒΑ à ΑΛ, le triangle ΑΒΓ est à la somme des triangles indiqués comme ΓΑ est à AM. Mais le rapport de ΓΑ à AM est supérieur au rapport de ΦΡ à ΡΘ ; car le rapport de ΓΑ à AM est égal au rapport de ΦΡ à ΡΠ en vertu de la similitude des triangles ; ainsi le rapport du triangle ΑΒΓ à la somme des triangles indiqués est supérieur au rapport de ΦΡ à ΡΘ ; il s'ensuit, par dissociation, qu'aussi le rapport de la somme des parallélogrammes ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ aux triangles qui restent est supérieur[2] au rapport de ΦΘ à ΘΡ. Soit donc un rapport ΧΘ à ΘΡ égal au rapport de la somme des parallélogrammes à la somme des triangles[3]. Puisqu'on a alors une certaine grandeur, le triangle ΑΒΓ, dont le centre de gravité est le point Θ, qu'on en a retranché la grandeur composée des parallélogrammes ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ, et que le centre de gravité de la grandeur retranchée est le point P, le centre de gravité de la grandeur restante, composée des triangles qui restent, est situé sur le prolongement de la droite ΡΘ, sur lequel on a découpé un segment ayant à ΘΡ le rapport qu'a la grandeur retranchée à la grandeur qui reste[4]. Le point X est donc centre de gravité de la grandeur composée des triangles qui restent, ce qui

1. Cf. Eucl. V, 16 et 18 ; VI, 2.
2. Cf. *De la sph. et du cyl.* II, 7 et Pappus VII, 45.
3. ΧΘ est en effet supérieur à ΡΘ ; cf. Eucl. V, 8.
4. Cf. prop. 8.

τᾶς ΣΔ εὐθείας. Ἔστω δὴ τὸ Ρ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΡΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΔ ἁ ΓΦ. Τὸ δὴ ΑΔΓ [τρίγωνον] ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τῷ ΑΔΓ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΓΑ ποτὶ ΑΜ, διὰ τὸ ἴσας εἶμεν τὰς ΑΜ, ΜΚ, ΖΓ, ΚΖ. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΒΑ ποτὶ ΑΛ, τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΓΑ ποτὶ ΑΜ. Ἀλλὰ ἁ ΓΑ ποτὶ ΑΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΦΡ ποτὶ ΡΘ · ὁ γὰρ τᾶς ΓΑ ποτὶ ΑΜ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ [ὅλας] τᾶς ΦΡ ποτὶ ΡΠ [διὰ τὸ ὁμοῖα εἶμεν τὰ τρίγωνα] · καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον ποτὶ τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΦΡ ποτὶ ΡΘ · ὥστε καὶ διελόντι τὰ ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ παραλληλόγραμμα ποτὶ τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΦΘ ποτὶ ΘΡ. Γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων ποτὶ τὰ τρίγωνα λόγῳ ἁ ΧΘ ποτὶ ΘΡ. Ἐπεὶ οὖν ἔστι τι μέγεθος τὸ ΑΒΓ, οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ, καὶ ἀφήρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ παραλληλογράμμων, καί ἐστιν τοῦ ἀφηρημένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ρ σαμεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΡΘ εὐθείας ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας ποτὶ τὰν ΘΡ τοῦτον ἐχούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. Τὸ ἄρα Χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ

1 ἔστω Torellius : ἔσται codd. || 6 ΜΚ mss. G𝔛 : ΜΖ mss. DEH || καὶ DEGH : om. 𝔛 || 12 ὅλας codd. : om. Eutocius del. Heiberg || 13 διὰ τὸ ὁμοῖα εἶμεν τὰ τρίγωνα codd. : om. Eutocius del. Heiberg || 17 ἔχει GH𝔛 : om. DE || 21 ΚΞ, ΖΟ mss. G𝔛 : ΚΖΞΟ mss. DEH || 25 ΡΘ Basil. : ΕΘ mss. DEH, ΠΘ ms. G, om. 𝔛 || 26 ποτὶ Torellius : ἐπὶ codd.

est impossible, puisque tous (sc. ces triangles) sont situés d'un même côté[1] de la droite menée par le point X parallèlement à ΑΔ. La proposition est donc évidente.

Autre démonstration de la même proposition

Soit le triangle ΑΒΓ ; menons la droite ΑΔ joignant Α au milieu du côté ΒΓ. Je dis que le centre de gravité du triangle ΑΒΓ est situé sur ΑΔ.

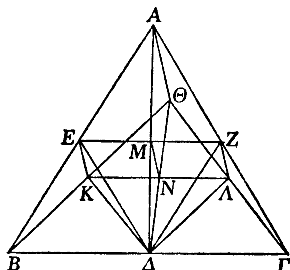


Fig. 44

En effet, qu'il n'en soit pas ainsi, mais que le centre de gravité soit, si possible, le point Θ. Menons les droites ΑΘ, ΘΒ et ΘΓ et joignons les milieux des côtés ΒΑ, ΑΓ (sc. et ΒΓ) par les droites ΕΔ et ΖΕ. Menons ΕΚ et ΖΛ parallèlement à ΑΘ, et menons les droites ΚΛ, ΛΔ, ΔΚ, ΔΘ et ΜΝ. Puisque le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΔΖΓ, parce que ΒΑ est parallèle[2] à ΖΔ, puisque, de plus, le centre de gravité du triangle ΑΒΓ est le point Θ (sc. par hypothèse), le centre de gravité du triangle ΖΔΓ est le point[3] Λ ; car les points Θ et Λ sont semblablement situés dans chacun des triangles[4]. Pour les mêmes raisons, aussi dans le triangle ΕΒΔ, le centre de gravité

1-4. Cf. notes compl.

τῶν περιλειπομένων· ὅπερ ἀδύνατον· τᾶς γὰρ διὰ τοῦ Χ εὐθείας παρὰ τὰν ΑΔ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταὐτὰ πάντα ἐντί [τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος]. Δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἁ ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ· λέγω ὅτι ἐπὶ τᾶς ΑΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

Fig. 44

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἵ τε ΑΘ, ΘΒ, ΘΓ καὶ αἱ ΕΔ, ΖΕ ἐπὶ μέσας τὰς ΒΑ, ΑΓ, καὶ παρὰ τὰν ΑΘ ἄχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΔ, ΔΚ, ΔΘ, ΜΝ. Ἐπεὶ ὁμοῖόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ διὰ τὸ παράλληλον εἶμεν τὰν ΒΑ τᾷ ΖΔ, καί ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον, καὶ τοῦ ΖΔΓ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Λ σαμεῖον· ὁμοίως γὰρ ἐντι κείμενα τὰ Θ, Λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων [ἐπειδήπερ ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιέοντι γωνίας· φανερὸν γὰρ τοῦτο]. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΕΒΔ κέντρον τοῦ

13 τὰν G : τὸν DEH || 16 ἐντι κείμενα 𝔄 : ἀντικείμενα DEGH || 18 ποιέοντι Heiberg : ποιῶντι codd. || 18-19 φανερὸν γὰρ τοῦτο DEGH : om. 𝔄.

est le point K, de façon que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme des deux triangles EBΔ et ZΔΓ est situé au milieu[1] du segment de droite KΛ. Mais le milieu du segment KΛ est le point N, puisque[2] BK est à ΘK comme BE est à EA, que ΓΛ est à ΛΘ comme ΓZ est à ZA, et que, dans ces conditions, BΓ est parallèle[3] à KΛ. On a mené, de plus, la droite ΔΘ ; le segment KN est donc au segment NΛ comme BΔ est à ΔΓ. Il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme des deux triangles indiqués est le point N. D'autre part, dans le parallélogramme AEΔZ, le centre de gravité[4] est le point M, de façon que le centre de gravité de la grandeur somme de toutes les grandeurs est situé sur la droite MN. Mais le centre de gravité du triangle ABΓ est aussi (sc. par hypothèse) le point Θ. Par conséquent la droite MN prolongée passera par le point Θ, ce qui est impossible[5]. Le centre de gravité du triangle ABΓ ne peut donc pas ne pas être situé sur la droite AΔ. Il est donc situé sur cette droite.

14.

Dans tout triangle le centre de gravité est le point de concours[6] des droites joignant les sommets du triangle aux milieux des côtés.

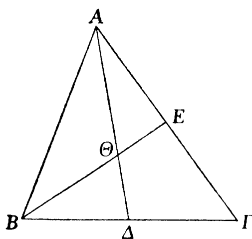


Fig. 45

1. Cf. prop. 4.
2. Cf. Eucl. VI, 2.
3-6. Cf. notes compl.

βάρεός ἐστι τὸ Κ σαμεῖον· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΕΒΔ, ΖΔΓ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ μέσας τᾶς ΚΛ εὐθείας [ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ ΕΒΔ, ΖΔΓ τρίγωνα]. Καί ἐστιν τᾶς ΚΛ μέσον τὸ Ν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἁ ΒΕ ποτὶ ΕΑ, οὕτως ἁ ΒΚ ποτὶ ΘΚ, ὡς δὲ ἁ ΓΖ ποτὶ ΖΑ, οὕτως ἁ ΓΛ ποτὶ ΛΘ· εἰ δὲ τοῦτο, ἔστιν ἁ ΒΓ τᾷ ΚΛ παράλληλος. Καὶ ἐπέζευκται ἁ ΔΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ ΔΓ, οὕτως ἁ ΚΝ ποτὶ τὰν ΝΛ· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ Ν. Ἔστιν δὲ καὶ τοῦ ΑΕΔΖ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ σαμεῖον· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΜΝ εὐθείας. Ἔστιν δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον· ἁ ΜΝ ἄρα ἐκβαλλομένα πορεύεται διὰ τοῦ Θ σαμείου· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου οὐκ ἔστιν ἐπὶ τᾶς ΑΔ εὐθείας· ἔστιν ἄρα ἐπ' αὐτᾶς.

ιδ'

Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ συμπίπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τᾶν γωνιᾶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι.

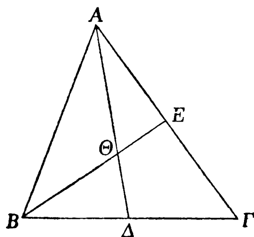


Fig. 45

8 ΔΓ ms. ꭓ : B mss. DEGH ‖ 15 διὰ EGꭓ : δὲ διὰ DH.

Soit le triangle ΑΒΓ ; menons la droite ΑΔ joignant A au milieu Δ de ΒΓ, et la droite BE joignant B au milieu E de ΑΓ. Le centre de gravité du triangle ΑΒΓ sera ainsi situé sur chacune des deux droites ΑΔ et BE, car cela a été démontré[1]. Le point Θ est donc le centre de gravité.

15.

Dans tout trapèze ayant deux côtés parallèles entre eux, le centre de gravité est situé sur le segment de droite joignant les milieux des côtés parallèles en un point qui divise ce segment de manière que le segment partiel ayant pour extrémité le milieu du plus petit des côtés parallèles soit au segment qui reste comme la somme du double du plus grand côté et du plus petit côté parallèles est à la somme du double du plus petit côté et du plus grand côté parallèles[2].

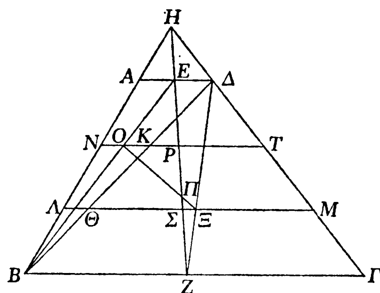


Fig. 46

Soit le trapèze ΑΒΓΔ ayant les côtés ΑΔ et ΒΓ parallèles, et le segment de droite EZ joignant les milieux des côtés ΑΔ et ΒΓ. Il est d'abord évident que le centre de gravité du trapèze est situé sur EZ.

1. Cf. prop. 13.
2. Proposition citée *Quadr. parab.* 10.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἁ μὲν ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ, ἁ δὲ ΒΕ ἐπὶ μέσαν τὰν ΑΓ· ἐσσεῖται δὴ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐφ' ἑκατέρας τᾶν ΑΔ, ΒΕ· δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ὥστε τὸ Θ σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν.

ιε'.

Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους ἀλλάλαις τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὰν διχοτομίαν τᾶς ἐλάσσονος τᾶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἁ ἴσα τᾷ διπλασίᾳ τᾶς μείζονος μετὰ τᾶς ἐλάσσονος ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ἐλάσσονος μετὰ τᾶς μείζονος τᾶν παραλλήλων.

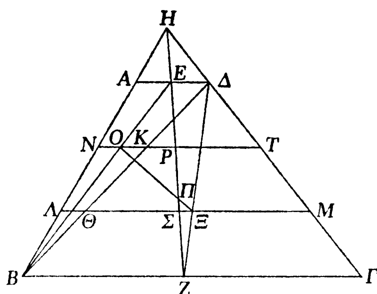


Fig. 46

Ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ παραλλήλους ἔχον τὰς ΑΔ, ΒΓ, ἁ δὲ ΕΖ ἐπιζευγνυέτω τὰς διχοτομίας τᾶν ΑΔ, ΒΓ. Ὅτι οὖν ἐπὶ τᾶς ΕΖ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου

2 ἐσσεῖται Heiberg : εἰ DEH𝔏 ἔστι G || 10-11 ἔχον τὰν G : ἐχόντων DEH || 13 τᾷ διπλασίᾳ G𝔏 : τᾶς διπλασίας DEH.

En prolongeant en effet les segments ΓΔΗ, ΖΕΗ et ΒΑΗ, il est manifeste qu'ils convergent en un même point, que le centre de gravité du triangle ΗΒΓ sera situé sur le segment de droite ΗΖ, et que le centre de gravité du triangle ΑΗΔ sera semblablement situé[1] sur le segment ΕΗ. Il s'ensuit que le centre de gravité du trapèze restant ΑΒΓΔ sera situé[2] sur ΕΖ. Joignons les points Β et Δ et divisons ΒΔ en trois parties égales par les points Κ et Θ ; menons par les points Κ et Θ les parallèles ΛΘΜ et ΝΚΤ à ΒΓ, et menons les droites ΔΖ, ΒΕ et ΟΞ ; le centre de gravité du triangle ΔΒΓ sera ainsi situé sur ΘΜ, puisque ΘΒ est la troisième partie[3] de ΒΔ et que ΜΘ a été mené par Θ parallèlement à la base. Mais le centre de gravité du triangle ΔΒΓ est lui aussi situé sur ΔΖ, de façon que le point Ξ est le centre de gravité du triangle indiqué. Or pour les mêmes raisons le point Ο est le centre de gravité du triangle ΑΒΔ. Il s'ensuit que pour la grandeur qui est la somme des triangles ΑΒΔ et ΒΔΓ, à savoir pour le trapèze, le centre de gravité est situé sur ΟΞ. Mais le centre de gravité du trapèze indiqué est aussi situé sur ΕΖ, de façon que dans le trapèze ΑΒΓΔ le centre de gravité est le point Π. D'autre part, le rapport du triangle ΒΔΓ au triangle ΑΒΔ sera égal[4] au rapport de ΟΠ à ΠΞ. Mais le rapport du triangle ΒΔΓ au triangle ΑΒΔ est égal[5] au rapport de ΒΓ à ΑΔ, et le rapport de ΟΠ à ΠΞ est égal[6] au rapport de ΡΠ à ΠΣ, de façon que ΒΓ est à ΑΔ comme ΡΠ est à ΠΣ ; par conséquent le rapport de la somme du double de ΒΓ et de ΑΔ à la somme du double de ΑΔ et de ΒΓ est égal au rapport de la somme du double de ΡΠ et de ΠΣ à la somme du double de ΠΣ et de ΠΡ. Mais le double de ΡΠ augmenté de ΠΣ est égal à la somme de ΣΡ et de ΡΠ, qui est elle-même égale[7] à ΠΕ, et le double de ΠΣ augmenté de ΠΡ est égal à la somme de ΡΣ et de ΣΠ, qui est elle-même égale à ΠΖ[8]. La proposition est donc démontrée.

1-8. Cf. notes compl.

φανερόν. Ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς ΓΔΗ, ΖΕΗ, ΒΑΗ, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται, καὶ ἐσσεῖται τοῦ ΗΒΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΗΖ, καὶ ὁμοίως τοῦ ΑΗΔ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΕΗ· καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ ΑΒΓΔ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΖ. Ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ ΒΔ διῃρήσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Κ, Θ σαμεῖα, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰν ΒΓ ἄχθωσαν αἱ ΛΘΜ, ΝΚΤ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΖ, ΒΕ, ΟΞ· ἐσσεῖται δὴ τοῦ μὲν ΔΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΘΜ, ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ ΘΒ τᾶς ΒΔ [καὶ διὰ τοῦ Θ σαμείου παράλληλος τᾷ βάσει ἆκται ἁ ΜΘ]. Ἔστιν δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΔΒΓ τριγώνου καὶ ἐπὶ τᾶς ΔΖ· ὥστε τὸ Ξ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εἰρημένου τριγώνου. Διὰ ταὐτὰ δὲ καὶ τὸ Ο σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒΔ, ΒΔΓ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, ὅπερ ἐστὶ τὸ τραπέζιον, κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΟΞ εὐθείας. Ἔστιν δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἐπὶ τᾶς ΕΖ· ὥστε τοῦ ΑΒΓΔ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Π σαμεῖον. Ἔχοι δ' ἂν τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ ΑΒΔ λόγον, ὃν ἁ ΟΠ ποτὶ ΠΞ. Ἀλλ' ὡς τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, οὕτως ἐντὶ ἁ ΒΓ ποτὶ ΑΔ, ὡς δὲ ἁ ΟΠ ποτὶ ΠΞ, οὕτως ἁ ΡΠ ποτὶ ΠΣ· καὶ ὡς ἄρα ἁ ΒΓ ποτὶ ΑΔ, οὕτως ἁ ΡΠ ποτὶ ΠΣ· ὥστε καὶ ὡς δύο αἱ ΒΓ μετὰ τᾶς ΑΔ ποτὶ δύο τὰς ΑΔ μετὰ τᾶς ΒΓ, οὕτως δύο αἱ ΡΠ μετὰ τᾶς ΠΣ ποτὶ δύο τὰς ΠΣ μετὰ τᾶς ΠΡ. Ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ΡΠ μετὰ τᾶς ΠΣ συναμφότερός ἐστιν ἁ ΣΡΠ, τουτέστιν ἁ ΠΕ, δύο δὲ αἱ ΠΣ μετὰ τᾶς ΠΡ συναμφότερός ἐστιν ἁ ΡΣΠ, τουτέστιν ἁ ΠΖ· δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα.

1 ἐκβάλῃς EG𝔅 : ἐκβάλῃ DH ‖ 2 καὶ 𝔅 : om. DEGH ‖ τοῦ Heiberg : τὸ τοῦ codd. ‖ 4 τὸ add. Heiberg ‖ 18 ἐπὶ DEH : ἐστιν ἐπὶ G𝔅 ‖ 29 ΡΣΠ Heiberg : ΡΠΣ codd.

DE L'ÉQUILIBRE DES FIGURES PLANES II

1.

Si deux aires comprises entre une droite et une parabole, qu'il nous est possible d'appliquer[1] à un segment de droite donné, n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux aires sera situé sur le segment de droite joignant leurs centres de gravité et divisera le segment indiqué de manière que ses segments partiels sont dans le rapport inverse des aires.

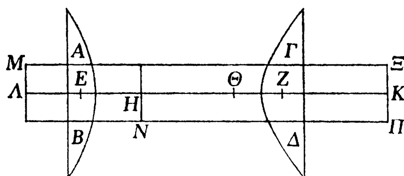


Fig. 47

Soit AB et ΓΔ deux aires telles que nous venons de les définir ; soit E et Z leurs centres de gravité ; que le rapport de ZΘ à ΘE soit égal au rapport de AB à ΓΔ. Il faut montrer que le centre de gravité de la grandeur composée des deux aires AB et ΓΔ est le point Θ.

Soit donc deux segments ZH et ZK égaux chacun

1. La possibilité de cette application est démontrée dans le traité *La quadr. de la parabole.*

Ἰσορροπικῶν β΄

α΄.

Εἴ κα δύο χωρία περιεχόμενα ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχωντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν διαιρέον οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τοῖς χωρίοις.

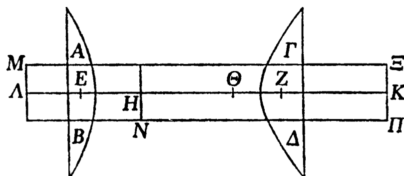


Fig. 47

Ἔστω δύο χωρία τὰ ΑΒ, ΓΔ, οἷα εἴρηται, κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος ἔστω τὰ Ε, Ζ σαμεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον τὸ ΑΒ ποτὶ τὸ ΓΔ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΖΘ ποτὶ ΘΕ. Δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, ΓΔ χωρίων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον.

Ἔστω δὴ τᾷ μὲν ΕΘ ἑκατέρα ἴσα τᾶν ΖΗ, ΖΚ, τᾷ δὲ

4 ἃ DEGH Eutocius : om. ℒ ‖ 6 ἔχωντι Heiberg : ἔχοντα codd. ‖ 8 διαιρέον Torellius : διαιρέων DEGH diuisis ℒ ‖ 10 ἀντιπεπονθότως ℒ : ἀντιπεπονθότων DEGH ‖ 12 E, Z mss. DEGH : ht ms. ℒ ‖ 13 AB ποτὶ τὸ ΓΔ mss. DEGH : abg ad dez ms. ℒ ‖ ΖΘ mss. DEGH : tk ms. ℒ ‖ ΘΕ mss. DEGH : kh ms. ℒ ‖ 15 Θ mss. DEGH : k ms. ℒ ‖ 16 δὴ ℒ : δὲ DEGH ‖ ΕΘ mss. DEGH : hk ms. ℒ ‖ ΖΗ, ΖΚ mss. DEGH : tltm ms. ℒ.

à EΘ, et un segment EΛ égal à ZΘ, c'est-à-dire à HE ; ΛΘ sera donc aussi égal[1] à KΘ ; de plus, le rapport de ΛH à HK sera égal au rapport de AB à ΓΔ, chacun de ces segments étant double de chacun[2]. Appliquons dès lors le long de ΛH, de part et d'autre de ce segment, l'aire AB, de façon que le rectangle MN soit équivalent à l'aire AB ; le centre de gravité du rectangle MN sera ainsi[3] le point E. Traçons le rectangle NΞ ; le rapport du rectangle MN au rectangle NΞ sera alors égal[4] au rapport du segment de droite ΛH au segment HK. Mais le rapport de l'aire AB à l'aire ΓΔ est lui aussi égal au rapport de ΛH à HK ; il s'ensuit que l'aire AB est à l'aire ΓΔ comme le rectangle MN est au rectangle NΞ, et par permutation[5] ; or l'aire AB est équivalente au rectangle MN ; il s'ensuit que l'aire ΓΔ est, de son côté, équivalente au rectangle NΞ, dont le centre de gravité est le point Z. Et comme le segment ΛΘ est égal à ΘK et que tout le segment ΛK divise en deux parties égales les côtés opposés, le centre de gravité du rectangle entier[3] ΠM est le point Θ. Mais le rectangle MΠ est égal à la somme des rectangles MN et NΞ ; il s'ensuit que la grandeur composée des aires AB et ΓΔ admet elle aussi comme centre de gravité le point Θ.

2.

Si dans un segment limité par une droite et une parabole on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, si on inscrit une seconde fois, dans les segments qui restent, des triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, et si on continue de la même manière à inscrire des triangles dans les segments restants, la figure ainsi obtenue sera dite inscrite, dans le segment de parabole, d'une

1-2. Cf. notes compl.
3. Cf. prop. I, 10.
4. Cf. Eucl. VI, 1.
5. Cf. Eucl. V, 16.

ΖΘ, τουτέστι τᾷ ΗΕ, ἴσα ἁ ΕΛ· ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἁ ΛΘ τᾷ ΚΘ ἴσα, καὶ ἔτι ὡς ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ ποτὶ ΓΔ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. Παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὰν ΛΗ τὸ χωρίον τοῦ ΑΒ ἐφ' ἑκάτερα τᾶς ΛΗ, ὥστε εἶμεν τὸ ΜΝ ἴσον τῷ ΑΒ· ἐσσεῖται δὴ τοῦ ΜΝ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον. Συμπεπληρώσθω δὴ τὸ ΝΞ, ἕξει δὲ τὸ ΜΝ ποτὶ τὸ ΝΞ λόγον, ὃν ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ΑΒ ποτὶ τὸ ΓΔ τὸν τᾶς ΛΗ ποτὶ ΗΚ λόγον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ ποτὶ ΓΔ, οὕτως τὸ ΜΝ ποτὶ ΝΞ. Καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δὲ τὸ ΑΒ τῷ ΜΝ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΓΔ τῷ ΝΞ, καὶ κέντρον ἐστὶν αὐτοῦ τοῦ βάρεος τὸ Ζ σαμεῖον. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ΛΘ τᾷ ΘΚ, καὶ ὅλα ἁ ΛΚ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς δίχα τέμνει, [τοῦ] ὅλου τοῦ ΠΜ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον. Ἀλλὰ τὸ ΜΠ ἴσον τῷ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΜΝ, ΝΞ· ὥστε καὶ τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, ΓΔ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον.

β′.

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ παραλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσιας ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ παραλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι γνωρίμως ἐγγράφεσθαι

1 ΖΘ mss. DEGH : lh ms. 𝓛 ‖ τουτέστι τᾷ ΗΕ om. 𝓛 ‖ ΗΕ ms. D : ΗΘ mss. EGH ‖ ΕΛ mss. DEGH : hn ms. 𝓛 ‖ ΛΘ mss. DEGH : kh ms. 𝓛 ‖ 2 ΚΘ mss. DEGH : lm ms. 𝓛 ‖ 4 ΛΗ mss. DEGH : ln ms. 𝓛 ‖ χωρίον Torellius : σαμεῖον codd. ‖ τοῦ codd. : τὸ Torellius ‖ 10 ΑΒ mss. DEGH : abg ms. 𝓛 ‖ ΜΝ mss. DEGH : xo ms. 𝓛 ‖ 11 ΓΔ mss. DEGH : edz ms. 𝓛 ‖ ΝΞ mss. DEGH : op ms. 𝓛 ‖ 13 τοῦ codd. : del. Heiberg ‖ 16 ΑΒ, ΓΔ mss. DEGH : abg dez ms. 𝓛 ‖ 17 Θ mss. DEGH : k ms. 𝓛 ‖ 23 ἀεὶ DEGH : om. 𝓛 ‖ 25 γνωρίμως G : γνωρίσμως DEH.

manière exacte. La figure inscrite de cette manière a les propriétés évidentes que voici : les droites qui joignent les sommets les plus voisins du sommet du segment de parabole, ainsi que celles qui joignent les sommets suivants, seront parallèles à la base du segment ; les segments de ces droites (sc. situés à l'intérieur de la parabole) seront divisés en deux parties égales par le diamètre du segment de parabole ; ces droites divisent le diamètre du segment dans le rapport des nombres impairs successifs, le nombre un étant attaché au sommet du segment. Ces propriétés seront à démontrer le moment venu[1].

Or si dans un segment limité par une droite et une parabole on inscrit une figure rectiligne d'une manière exacte, le centre de gravité de la figure inscrite sera situé sur le diamètre du segment.

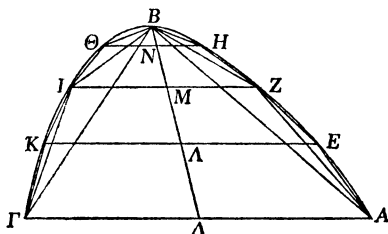


Fig. 48

Soit le segment ΑΒΓ, tel qu'il a été indiqué ; inscrivons dans ce segment d'une manière exacte la figure rectiligne ΑΕΖΗΒΘΙΚΓ. Il faut démontrer que le centre de gravité de la figure rectiligne est situé sur la droite ΒΔ.

Puisque, en effet, le centre de gravité du trapèze ΑΕΚΓ est situé[2] sur le segment de droite ΛΔ, celui du trapèze ΕΖΙΚ sur le segment de droite ΜΛ, celui

1. Les démonstrations promises ici par Archimède ne se trouvent dans aucun de ses écrits conservés.

2. Cf. prop. I, 15.

λεγέσθω. Φανερὸν δὲ ὅτι τοῦ οὕτως ἐγγραφέντος σχήματος αἱ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύουσαι τάς τε ἔγγιστα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τὰς ἑξῆς παρὰ τὰν βάσιν ἐσσοῦνται τοῦ τμάματος καὶ δίχα τμαθήσονται ὑπὸ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου καὶ τὰν διάμετρον τεμοῦντι εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους ἑνὸς λεγομένου ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος. Ταῦτα δὲ δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν.

Εἰ δέ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγραφῇ, τοῦ ἐγγραφέντος κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου.

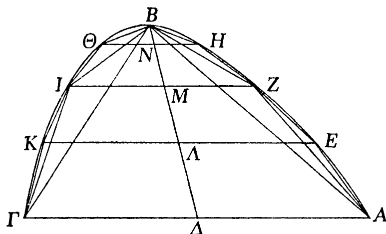


Fig. 48

Ἔστω τμᾶμα τὸ ΑΒΓ οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ΑΕΖΗΒΘΙΚΓ. Δεικτέον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ΒΔ.

Ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν ΑΕΚΓ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΛΔ ἐστί, τοῦ δὲ ΕΖΙΚ τραπεζίου τὸ κέντρον

5 διάμετρον ℒ : διαμέτρῳ DEG διαμέτρων H ‖ 6 τούς τῶν EGℒ : τούτων DH ‖ 7 ταῦτα Eutocius : τοῦτο codd. ‖ 9 δέ κα Heiberg : δὲ καὶ DGH κα καὶ E om. ℒ ‖ 14 ΑΕΖΗΒΘΙΚΓ ms. G : ΔΕΖΗΒΘΙΚΓ mss. DEH ae. zh. ti. kg, diameter autem portionis sit bd ms. ℒ ‖ 17 ΑΕΚΓ mss. Gℒ : ΕΖ ΙΚ mss. DEH.

du trapèze ZHΘI sur le segment de droite[1] MN, et que, de plus, le centre de gravité du triangle HBΘ est situé sur BN, il est évident que le centre de gravité de la figure rectiligne entière est situé sur le segment de droite BΔ.

3.

Si on inscrit exactement, dans chacun de deux segments semblables[2] compris entre une droite et une parabole, une figure rectiligne, et si les figures rectilignes inscrites ont le même nombre de côtés, les centres de gravité des figures rectilignes divisent d'une manière semblable (sc. dans la même proportion) les diamètres des segments.

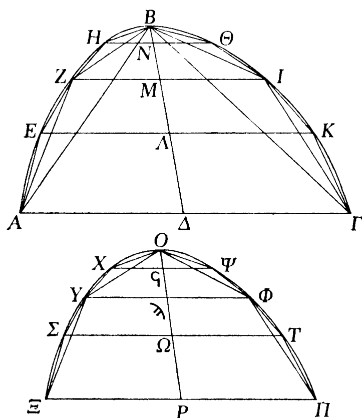


Fig. 49

Soit les deux segments ABΓ et ΞOΠ ; inscrivons-y exactement des figures rectilignes, dont le nombre

1. Cf. prop. I, 13.
2. Cf. Apollonius, VI, déf. 7.

ἐπὶ τᾶς ΜΛ, τοῦ δὲ ΖΗΘΙ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς ΜΝ, ἔτι δὲ καὶ τοῦ ΗΒΘ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΒΝ, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΒΔ ἐστίν.

γ′

Εἴ κα δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκάτερον εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, ἔχωντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν τμαμάτων.

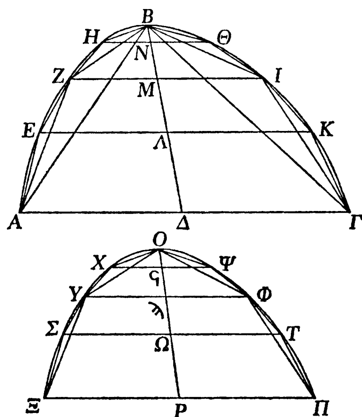


Fig. 49

Ἔστω δύο τμάματα τὰ ΑΒΓ, ΞΟΠ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως, καὶ τᾶν πασᾶν πλευρᾶν

3 καὶ DEGH : om. 𝓛 ‖ 10 τέμνοντι EG : τέμνωντι DH ‖ 12 ΞΟΠ mss. DEGH : dez ms. 𝓛 ‖ 13 καὶ τᾶν Heiberg : κατὰ DEGH.

total des côtés soit le même dans chaque figure, et soit ΒΔ et ΟΡ les diamètres des segments ; menons les droites ΕΚ, ΖΙ,, ΗΘ dans l'une, et ΣΤ, ΥΦ, ΧΨ dans l'autre figure. Du moment donc que le segment de droite ΒΔ est divisé par les parallèles dans le rapport des nombres impairs successifs et qu'il en est de même du segment de droite ΡΟ, du moment, de plus, que le nombre des segments partiels est le même pour ΒΔ et pour ΡΟ, il est évident que les segments partiels seront (sc. de part et d'autre) dans les mêmes rapports[1] et que les segments de droite parallèles auront les mêmes rapports. En outre, les centres de gravité des trapèzes ΑΕΚΓ et ΞΣΤΠ seront placés semblablement sur les segments de droite ΛΔ et ΩΡ, puisque le rapport de ΑΓ à ΕΚ est égal[2] au rapport de ΞΠ à ΣΤ ; de même dans les trapèzes ΕΖΙΚ et ΣΥΦΤ les centres de gravité diviseront semblablement les segments de droite ΛΜ et Ω ϡ, dans les trapèzes ΖΗΘΙ et ΥΧΨΦ les centres de gravité diviseront semblablement ΜΝ et ϙϡ, et aussi dans les triangles ΗΒΘ et ΧΟΨ les centres de gravité seront placés semblablement[3] sur ΒΝ et sur Οϙ ; les trapèzes et les triangles (sc. correspondants) ont donc le même rapport[4]. Il est donc évident[5] que, dans la figure rectiligne entière inscrite au segment ΑΒΓ, le centre de gravité divise ΒΔ dans la même proportion dans laquelle, sur la figure inscrite au segment ΞΟΠ, le centre de gravité divise ΟΡ, ce qu'il fallait démontrer.

1-3. Cf. notes compl.

4. Les trapèzes et les triangles correspondants étant semblables, ils ont entre eux les mêmes rapports que les carrés sur leurs côtés correspondants (cf. Eucl. VI, 20), c'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{A\Gamma KE}}{\Xi\Pi\mathrm{T}\Sigma} = \frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}{\overline{\Xi\Pi}^2};\ \frac{\mathrm{EKIZ}}{\Sigma\mathrm{T}\Phi\Upsilon} = \frac{\overline{\mathrm{EK}}^2}{\overline{\Sigma\mathrm{T}}^2};\ \text{etc.}$$

Or les rapports $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Xi\Pi}$, $\frac{\mathrm{EK}}{\Sigma\mathrm{T}}$, etc. étant égaux entre eux, il en est de même des rapports $\frac{\mathrm{A\Gamma KE}}{\Xi\Pi\mathrm{T}\Sigma}$, $\frac{\mathrm{EKIZ}}{\Sigma\mathrm{T}\Phi\Upsilon}$, etc.

5. D'après prop. I, 6 et 7.

τὸν ἀριθμὸν ἐχόντων ἀλλάλοις ἴσον, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ ΒΔ, ΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΙ, ΗΘ καὶ αἱ ΣΤ, ΥΦ, ΧΨ. Ἐπεὶ οὖν ἅ τε ΒΔ διαιρεῖται ὑπὸ τᾶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν περισσῶν λόγους καὶ ἁ ΡΟ, καὶ τῷ πλήθει τὰ τμάματα αὐτᾶν ἴσα ἐντί, δῆλον ὡς τά τε τμάματα τᾶν διαμέτρων ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται, καὶ αἱ παράλληλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι. Καὶ τῶν τραπεζίων τοῦ τε ΑΕΚΓ καὶ τοῦ ΞΣΤΠ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶν ΛΔ, ΩΡ εὐθειᾶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ ΑΓ, ΕΚ ταῖς ΞΠ, ΣΤ · πάλιν δὲ καὶ τῶν ΕΖΙΚ, ΣΥΦΤ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς ΛΜ, ΩϠ, καὶ τῶν ΖΗΘΙ, ΥΧΨΦ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς ΜΝ, ϘϠ, ἐσσεῖται δὲ καὶ τῶν ΗΒΘ, ΧΟΨ τριγώνων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τᾶν ΒΝ, ΟϘ ὁμοίως κείμενα · ἔχοντι δὴ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα. Δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ ΑΒΓ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ὁμοίως διαιρεῖ τὰν ΒΔ καὶ τοῦ ἐν τῷ ΞΟΠ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὰν ΟΡ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2 ΒΔ, ΟΡ mss. DEGH : bh et ms. ℒ ‖ 2-3 ΕΚ, ΖΙ, ΗΘ mss. DEGH : ek mn xo ms. ℒ ‖ 3 καὶ αἱ Heiberg : καὶ DEGH ‖ ΣΤ, ΥΦ, ΧΨ mss. DEGH : cy fq ϙ9 ms ℒ ‖ ΒΔ mss. DEGH : bh et et ms. ℒ ‖ 5 καὶ ἁ ΡΟ Heiberg : καὶ ΠΡΟ mss. DEGH om. ℒ ‖ 6 ἐν ℒ : om. DEGH ‖ 8-9 ΑΕΚΓ καὶ τοῦ ΞΣΤΠ mss. DEGH : al cz ms. ℒ ‖ 9 ΛΔ, ΩΡ mss. DEGH : hstʌ ms. ℒ ‖ 10 ἐπεὶ Gℒ : ἐπὶ DEH ‖ 11 ΕΚ mss. DEGH : kl ms. ℒ ‖ ΞΠ, ΣΤ mss. DEGH : dz cy ms. ℒ ‖ δὲ ℒ : δὴ DEGH ‖ καὶ DEGH : om. ℒ ‖ ΕΖΙΚ mss. DEGH : kn ms. ℒ ‖ ΣΥΦΤ mss. DEGH : cq ms. ℒ ‖ 13 τὰς — 14 διαιρέοντα ℒ : om. DEGH ‖ 13 ΛΜ, ΩϠ mss. DEGH : rsoʌ ms. ℒ ‖ ΖΗΙΘ mss. DEGH : in mo ms. ℒ ‖ ΥΧΨΦ τραπεζίων DEGH : f 9 trapezalibus ℒ ‖ 15 ΜΝ mss. DEGH : pr ms. ℒ ‖ 16 ΒΝ, ΟϘ mss. DEGH : bp ez ms. ℒ ‖ 17 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH habentia ℒ ‖ δὴ Heiberg : δὲ codd. ‖ 19 τὸ κέντρον ℒ : τὸ Ο κέντρον DEGH ‖ 20 ΒΔ mss. DEGH : bh ms. ℒ ‖ ΞΟΠ mss. DEGH : z e d ms. ℒ ‖ 21 τὰν ΟΡ Nizzius : lineam et ms. ℒ ἐπὶ τὰν ΟΡ mss. DEH ἐπὶ τᾶς ΟΡ ms. G.

4.

Dans tout segment limité par une droite et une parabole, le centre de gravité est situé sur le diamètre du segment.

Soit ΑΒΓ un segment tel qu'il a été dit, et soit ΒΔ son diamètre. Il faut démontrer que le centre de gravité du segment indiqué est situé sur ΒΔ.

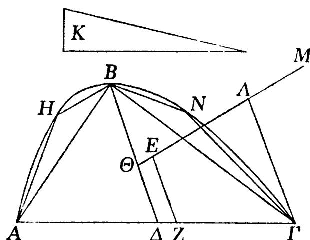


Fig. 50

S'il n'en est pas ainsi, que le centre de gravité soit le point E. Menons par E la parallèle EZ à ΒΔ et inscrivons au segment le triangle ΑΒΓ ayant même base et même hauteur que le segment ; que le rapport du triangle ΑΒΓ à l'aire K soit égal au rapport du segment de droite ΓΖ au segment de droite ΖΔ. Inscrivons aussi exactement au segment une figure rectiligne, de manière que les segments restants aient une somme inférieure à l'aire K. Le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite est ainsi situé[1] sur la droite ΒΔ. Que ce centre de gravité soit le point Θ. Joignons Θ à E et prolongeons ΘΕ ; menons la parallèle ΓΛ à ΒΔ. Dans ces conditions il est évident que le rapport de la figure rectiligne, inscrite au segment, à la somme des segments partiels qui restent est supérieur[2] au rapport

1. Cf. prop. 2.
2. Puisque la figure inscrite est supérieure au triangle ΑΒΓ, alors que la somme des segments partiels est inférieure à l'aire K.

δ′.

Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου.

Ἔστω τμᾶμα ὡς εἴρηται τὸ ΑΒΓ, οὗ διάμετρος ἔστω ἁ ΒΔ. Δεικτέον ὅτι τοῦ εἰρημένου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΒΔ.

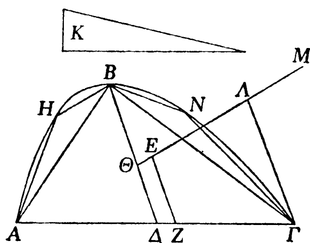


Fig. 50

Εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν ΒΔ ἁ ΕΖ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμᾶμα τρίγωνον τὸ ΑΒΓ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ΓΖ ποτὶ ΖΔ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ χωρίον· ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ Κ· τοῦ δὴ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΒΔ. Ἔστω τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΘΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ παρὰ τὰν ΒΔ ἄχθω ἁ ΓΛ· δῆλον δὴ ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰ λειπόμενα τμάματα

6 τὸ addidi ‖ 9 τὸ pr. add. Heiberg ‖ 12 K mss. DEGH : x ms. ℒ ‖ 14 K mss. DEGH : x ms. ℒ ‖ 16 ΘΕ mss. DEGH : ke ms. ℒ ‖ 17 δὴ Heiberg : δὲ codd.

du triangle ΑΒΓ à l'aire K. Mais le triangle ΑΒΓ est à l'aire K comme ΓΖ est à ΖΔ, et ainsi le rapport de la figure rectiligne inscrite à la somme des segments qui restent est supérieur au rapport de ΓΖ à ΖΔ, c'est-à-dire de ΛΕ à ΕΘ. (sc. Soit M un point de la droite ΘΛ tel) que le rapport de ΜΕ à ΕΘ soit le même que celui de la figure rectiligne à la somme des segments partiels[1]. Dès lors, puisque le centre de gravité du segment entier est le point E, celui de la figure rectiligne inscrite au segment le point Θ, il est évident que le centre de gravité de la grandeur restante, somme des segments partiels situés autour (sc. de la figure rectiligne inscrite), est situé[2] sur le prolongement de la droite ΘΕ de manière que le segment de droite qui en est découpé a avec le segment de droite ΘΕ le même rapport qu'a la figure rectiligne inscrite avec la somme des segments partiels restants. Par conséquent le centre de gravité de la grandeur qui est la somme des segments partiels restants est le point M, ce qui est absurde, puisque, une parallèle à ΒΔ étant menée par le point M, tous les segments restants seront situés d'un même côté de cette parallèle[3]. Il est donc évident que le centre de gravité du segment est situé sur la droite ΒΔ.

5.

Si on inscrit, dans un segment compris entre une droite et une parabole, exactement une figure rectiligne, le centre de gravité du segment entier est situé plus près du sommet du segment que le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite.

1. Le rapport de la figure rectiligne à la somme des segments partiels devant être supérieur au rapport de ΛΕ à ΕΘ, le point M se situera ainsi nécessairement sur le prolongement de ΘΛ.

2. Cf. prop. I, 8.

3. Cf. I, post. 7 et prop. I, 13.

ἢ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ, οὕτως ἁ ΓΖ ποτὶ ΖΔ · καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΓΖ ποτὶ ΖΔ, τουτέστιν ἁ ΛΕ ποτὶ ΕΘ. Ἐχέτω οὖν ἁ ΜΕ ποτὶ ΕΘ τὸν αὐτὸν λόγον τὸν τοῦ εὐθυγράμμου ποτὶ τὰ τμάματα. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ε κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ εὐθυγράμμου τὸ Θ, δῆλον ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐκϐληθείσας τᾶς ΘΕ καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἃ λόγον ἔχει ποτὶ τὰν ΘΕ ὃν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα. Ὥστε εἴη κα τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ σαμεῖον · ὅπερ ἄτοπον · τᾶς γὰρ διὰ τοῦ Μ παρὰ τὰν ΒΔ ἀγομένας ἐπὶ ταὐτὰ ἐσσοῦνται πάντα τὰ περιλειπόμενα τμάματα. Δῆλον οὖν ὅτι ἐπὶ τᾶς ΒΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

ε′.

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερόν ἐστι τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον.

1 Κ mss. DEGH : x ms. 𝓛 ‖ τρίγωνον add. Basil. ‖ 1-2 ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ ms. 𝓛 : om. DEGH ‖ 4 ΖΔ ms. 𝓛 : Δ mss. DEGH ‖ ΕΘ mss. DEGH : ek ms. 𝓛 ‖ 5 ΕΘ mss. DEGH : ek ms. 𝓛 ‖ 6 τὰ τμάματα DEGH : reliquas portiones 𝓛 ‖ Ε Basil. : Β mss. DEGH ‖ 8 λοιποῦ 𝓛 : λοιπὸν DEGH ‖ 10 ΘΕ mss. DEGH : ke ms. 𝓛 ‖ 11 ΘΕ mss. DEGH : ek ms. 𝓛 ‖ 13 εἴη κα Heiberg : εἴη κατὰ DEH erit et 𝓛 εἴη ἂν κατὰ G ‖ 15 τᾶς Torellius : τὰ DEGH ipsa 𝓛 ‖ 16 ἐσσοῦνται Heiberg : ἐσσοῦντι DEGH cadent 𝓛 ‖ 23 εὐθυγράμμου G𝓛 : εὐθύγραμμον DEH.

Fig. 51

Soit ΑΒΓ un segment tel que nous l'avons indiqué, et ΔΒ son diamètre ; inscrivons-y exactement un premier triangle ΑΒΓ et divisons ΒΔ par le point Ε de manière que ΒΕ soit double de ΕΔ ; le centre de gravité du triangle ΑΒΓ est donc[1] le point Ε. Divisons en deux parties égales chacun des segments de droite ΑΒ et ΒΓ par les points Ζ et Η, et menons par Ζ et Η les parallèles ΖΚ et ΛΗ à ΒΔ ; le centre de gravité du segment ΑΚΒ sera ainsi[2] sur ΖΚ, le centre de gravité du segment ΒΓΛ sur ΗΛ. Soit Θ et Ι ces centres, et menons la droite ΘΙ. Du moment que ΘΖΗΙ est un parallélogramme et que ΝΗ est égal[3] à ΖΝ, les segments de droite ΧΘ et ΧΙ sont à leur tour égaux ; il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur composée des segments ΑΚΒ et ΒΛΓ est situé au milieu[4] de ΘΙ, puisque les segments sont égaux, c'est-à-dire au point Χ. Mais comme le centre de gravité

1. Cf. prop. I, 14.
2. Cf. prop. 4.
3. Puisqu'on a $\frac{\mathrm{BZ}}{\mathrm{Z A}} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{H\Gamma}}$, ΖΗ est parallèle à ΑΓ, d'où $\frac{\mathrm{ZN}}{\mathrm{NH}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Gamma}} = 1$, et par conséquent ΖΝ = ΝΗ.
4. Puisque ΑΚΖ = ΚΖΒ, ΒΛΗ = ΛΗΓ, et que, de plus, ΚΖΒ = ΒΗΛ, ces triangles ayant des bases égales et même hauteur ; le triangle ΑΚΒ est donc égal au triangle ΒΛΓ ; cf. *Quadr. parab.* 17.

Fig. 51

Ἔστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα οἷον εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμως τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμάσθω ἁ ΒΔ κατὰ τὸ Ε, ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν ΒΕ τᾶς ΕΔ· ἔστιν οὖν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον. Τετμάσθω δὴ δίχα ἑκατέρα τᾶν ΑΒ, ΒΓ κατὰ τὰ Ζ, Η, καὶ διὰ τῶν Ζ, Η παρὰ τὰν ΒΔ ἄχθωσαν αἱ ΖΚ, ΛΗ· ἐσσεῖται ἄρα τοῦ μὲν ΑΚΒ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΖΚ, τοῦ ΒΓΛ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΗΛ. Ἔστω δὲ τὰ Θ, Ι, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΘΙ. Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΘΖΗΙ, καὶ ἴσα ἐστὶ τᾷ ΖΝ ἁ ΝΗ, ἔστιν ἄρα καὶ ἁ ΧΘ ἴσα τᾷ ΧΙ· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ μέσας τᾶς ΘΙ [ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τμάματα], τουτέστιν τὸ Χ σαμεῖον. Ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου

3 E mss. DEGH : n ms. ℒ || 4 BE mss. DEGH : bn ms. ℒ || ΕΔ mss. DEGH : nd ms. ℒ || 5 E mss. DEGH : n ms. ℒ || 6 τῶν Heiberg : τᾶν codd. || 7 ΛΗ mss. DEGH : et ms. ℒ || AKB mss. DEGH : a t b ms. ℒ || 8 τὸ add. Heiberg || ZK mss. DEGH : t e ms. ℒ || ΒΓΛ mss. DEGH : b k g ms. ℒ || 9 τὸ κέντρον τοῦ βάρεος DEGH : om. ℒ || ΗΛ mss. DEGH : z k ms. ℒ || 10 Θ, I mss. DEGH : l m ms. ℒ || 11 ΘΖΗΙ Basil. : ΘΖΗ mss. DEGH : e z m l ms. ℒ || 12 ΧΘ mss. DEGH : x l ms. ℒ || ΧΙ · ὥστε DEGH : x m et quoniam aequalis est portio a t b portioni b k g quia ℒ || ΑΚΒ, ΒΛΓ mss. DEGH : a t b b k g ms. ℒ || 14 ΘΙ mss. DEGH : lm ms. ℒ || τμάματα DEGH : om. ℒ || 15 X mss. DEGH : x ms. ℒ || μὲν DEGH : om. ℒ.

du triangle ΑΒΓ est le point E, et le centre de gravité de la grandeur composée des deux segments ΑΚΒ et ΒΛΓ le point X, il est évident que pour le segment entier ΑΒΓ le centre de gravité est situé sur XE, c'est-à-dire entre les points X et E ; par conséquent le centre de gravité du segment entier sera situé plus près du sommet du segment que le centre de gravité du triangle qui y est exactement inscrit.

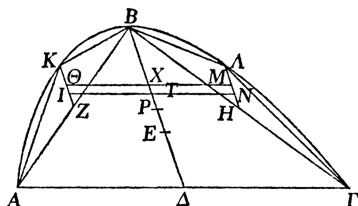


Fig. 52

Inscrivons maintenant, exactement, au segment le pentagone ΑΚΒΛΓ ; soit ΒΔ le diamètre du segment entier, et soient ΚΖ et ΛΗ les diamètres des deux segments (sc. ΑΚΒ et ΒΛΓ) ; du moment qu'on a inscrit au segment ΑΚΒ, d'une manière exacte, une figure rectiligne, le centre de gravité du segment[1] est plus près du sommet que le centre de gravité de la figure rectiligne (sc. du triangle). Soit donc Θ le centre de gravité du segment, I le centre de gravité du triangle ; soit, de même, M le centre de gravité du segment ΒΛΓ, N le centre de gravité du triangle (sc. inscrit) ; dès lors le centre de gravité de la grandeur composée des deux segments ΑΚΒ et ΒΛΓ sera le

1. Nous ne traduisons pas le qualificatif ὅλου qui prête à confusion. Tout le passage du texte grec entre crochets est une addition postérieure à Archimède.

κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε σαμεῖον, τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τὸ Χ, δῆλον οὖν ὅτι ὅλου τοῦ τμάματος τοῦ ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΧΕ, τουτέστι μεταξὺ τῶν Χ, Ε σαμείων· ὥστ' εἴη κα ἐγγύτερον τᾶς τοῦ τμάματος κορυφᾶς τὸ κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνωρίμως.

Fig. 52

Ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ΑΚΒΛΓ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος διάμετρος ἁ ΒΔ, ἑκατέρου δὲ τῶν τμαμάτων ἑκατέρα τᾶν ΚΖ, ΛΗ διάμετρος [καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ ΑΚΒ τμάματι ἐγγέγραπται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐγγύτερον τᾶς κορυφᾶς ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου]. Ἔστω οὖν τοῦ μὲν τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ, τοῦ δε τριγώνου τὸ Ι, πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν ΒΛΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ Ν· ἐσσεῖται δὴ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων συγκειμένου

1 Ε Basil. : h ms. ℒ om. DEGH ‖ 1-2 τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τὸ Χ mss. DEGH : om. ℒ ‖ 2 ΒΛΓ Torellius : ΛΓ mss. DEGH ‖ 3 τοῦ τμάματος DEGH : om. ℒ ‖ 6 τὸ add. Heiberg ‖ 11 διάμετρος Nizzius : διαμέτρων codd. ‖ 15 Θ mss. DEGH : n ms. ℒ ‖ 16 Ι mss. DEGH : m ms. ℒ ‖ 17 Μ mss. DEGH : t ms. ℒ ‖ δὴ ℒ : δὲ DEGH.

point X, le centre de gravité de la grandeur composée des deux triangles AKB et BΛΓ sera le point T. De nouveau donc, puisque dans le triangle ABΓ le centre de gravité est E et que pour la grandeur composée des deux segments AKB et BΛΓ le centre de gravité est X, il est évident que le centre de gravité du segment entier ABΓ est situé sur le segment de droite XE, en un point qui divise ce segment de manière que le rapport du segment partiel ayant pour extrémité X au segment partiel plus petit[1] soit égal au rapport du triangle ABΓ à la somme des segments AKB et BΛΓ. Quant au pentagone AKBΛΓ, son centre de gravité est situé sur ET, en un point qui divise ce segment de manière que le segment partiel ayant pour extrémité le point T soit au segment qui reste[1] comme le triangle ABΓ est à la somme du triangle AKB et BΛΓ. Du moment donc que le rapport du triangle ABΓ à la somme des triangles KAB et ΛBΓ est supérieur[2] au rapport du triangle ABΓ à la somme des deux segments, il est évident que le centre de gravité du segment ABΓ est plus près du sommet B que le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite. Le même raisonnement est valable pour toutes les figures rectilignes inscrites exactement dans les segments.

6.

Étant donné un segment compris entre une droite et une parabole, il est possible d'inscrire exactement dans ce segment une figure rectiligne de manière que le segment de droite compris entre les centres de gravité du segment (sc. de parabole) et de la figure rectiligne inscrite soit inférieur à tout segment de droite donné.

1. Cf. prop. I, 8.
2. Cf. Eucl. V, 8.

μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τριγώνων τὸ Τ. Πάλιν οὖν, ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων τὸ Χ, δῆλον ὡς [τοῦ] ὅλου τοῦ ΑΒΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΧΕ τμαθείσας οὕτως ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τὰ ΑΚΒ, ΒΛΓ τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ Χ ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα. Τοῦ δὲ ΑΚΒΛΓ πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΕΤ εὐθείας τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὰ ΑΚΒ, ΒΛΓ τρίγωνα, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ Τ ποτὶ τὸ λοιπόν. Ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὰ ΚΑΒ, ΛΒΓ τρίγωνα ἢ ποτὶ τὰ τμάματα, δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ΑΒΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερόν ἐστι τᾶς Β κορυφᾶς ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. Καὶ ἐπὶ πάντων εὐθυγράμμων τῶν ἐγγραφομένων ἐς τὰ τμάματα γνωρίμως ὁ αὐτὸς λόγος.

ϛ′.

Τμάματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δυνατόν ἐστιν ἐς τὸ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγράψαι, ὥστε τὰν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν κέντρων τοῦ βάρεος τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν πάσας τᾶς προτεθείσας εὐθείας.

1 X mss. DEGH : q ms. 𝔛 ‖ 3 κέντρον G𝔛 : κέντρου DEH ‖ E mss. DEGH : n ms. 𝔛 ‖ 4 X mss. DEGH : q ms. 𝔛 ‖ τοῦ DEGH : del. Heiberg ‖ 5 ἐστιν 𝔛 : om. DEGH ‖ 6 XE mss. DEGH : qn ms. 𝔛 ‖ 9 τοῦ δὲ DEGH : huius 𝔛 ‖ 10 ET mss. DEGH : qn ms. 𝔛 ‖ 13 T mss. DEGH : c ms. 𝔛 ‖ 14-15 KAB, ΛΒΓ mss. DEGH : akb big ms. 𝔛 ‖ 17 B mss. DEGH : om. 𝔛 ‖ 18 εὐθυγράμμων GH𝔛 : εὐθυγράμμου DE ‖ 19 γνωρίμως DEGH : om. 𝔛 ‖ 22 ἐστιν 𝔛 : om. DEGH

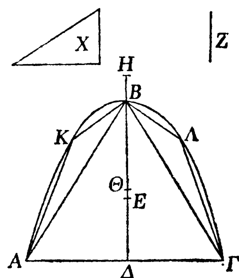


Fig. 53

Soit donné un segment ΑΒΓ tel qu'il a été indiqué ; soit Θ son centre de gravité ; inscrivons au segment, d'une manière exacte, le triangle ΑΒΓ ; soit Z le segment de droite donné ; que le rapport de ΒΘ à Z soit égal au rapport du triangle ΑΒΓ à une aire X. Inscrivons dès lors au segment ΑΒΓ, d'une manière exacte, la figure rectiligne ΑΚΒΛΓ, de façon que la somme des segments restants soit inférieure à l'aire X ; soit E le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite. Je dis donc que le segment de droite ΘΕ est inférieur à Z.

S'il n'en est pas ainsi, en effet, ΘΕ est ou bien égal ou supérieur à Z. Mais comme le rapport de la figure rectiligne ΑΚΒΛΓ à la somme des segments restants est supérieur[1] au rapport du triangle ΑΒΓ à X, c'est-à-dire au rapport de ΘΒ à Z, et que, d'autre part, le rapport de ΒΘ à Z n'est pas inférieur au rapport de ΒΘ à ΘΕ, parce que ΘΕ n'est pas inférieur[2] à Z, à plus forte raison le rapport de la figure rectiligne ΑΚΒΛΓ à la somme des segments restants est supérieur au rapport de ΒΘ à ΘΕ ; il s'ensuit que si nous nous donnons un autre segment de droite tel que le rapport de la figure rectiligne ΑΚΒΛΓ aux segments restants soit égal au rapport de cet autre segment à ΘΕ, — et cela, puisque le centre de gravité du triangle ΑΒΓ est Θ,

1-2. Cf. notes compl.

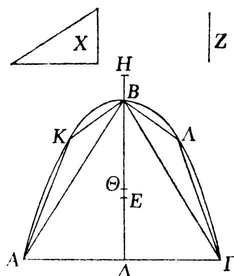


Fig. 53

Δεδόσθω τμᾶμα τὸ ΑΒΓ οἷον εἴρηται, οὗ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ Θ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρίμως τὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστω ἁ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἁ Ζ, καὶ ὃν λόγον ἔχει ἁ ΒΘ ποτὶ Ζ, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Χ χωρίον. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ΑΚΒΛΓ, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ Χ, καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε. Φαμὶ δὴ τὰν ΘΕ ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς Ζ.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. Ἐπεὶ δὲ τὸ ΑΚΒΛΓ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ Χ, τουτέστιν ἁ ΘΒ ποτὶ Ζ, ἔχει δὲ καὶ ἁ ΒΘ ποτὶ Ζ οὐκ ἐλάσσονα λόγον ἢ ὃν ἔχει ποτὶ ΘΕ, διὰ τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν ΘΕ τᾶς Ζ, πολλῷ ἄρα τὸ ΑΚΒΛΓ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΒΘ ποτὶ ΘΕ· ὥστε, ἐὰν ποιῶμες ὡς τὸ ΑΚΒΛΓ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἄλλαν τινα ποτὶ ΘΕ [ἐπειδὴ τοῦ ΑΒΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι

3 Ζ 𝓛 : ΑΖ mss. DEGH ‖ 4 Ζ 𝓛 : ΕΖ mss. DEGH ‖ 5 Χ Heiberg : Κ mss. DEGH, q ms. 𝓛 ‖ 7 Χ Heiberg : Κ mss. DEGH, q ms. 𝓛 ‖ 12 Χ Heiberg : Κ mss. DEGH, g ms. 𝓛 ‖ 19 ἐπειδὴ τοῦ ΑΒΓ τμάματος DEGH : erit maior quam linea bt. Sit quae ht. Quoniam autem portionis quidem abg ms. 𝓛.

en prolongeant EΘ et en découpant un segment de droite ayant à EΘ le rapport de la figure rectiligne AKBΛΓ aux segments restants —, le segment de droite (sc. ainsi pris) sera supérieur[1] à ΘB. Soit donc le rapport de HΘ à ΘE (sc. égal au rapport de AKBΛΓ aux segments restants). Le point H sera donc le centre de gravité[2] de la grandeur composée des segments restants, ce qui est impossible, puisque (sc. tous les segments restants) sont situés d'un même côté[3] de la parallèle à AΓ menée par H. Il est donc évident que ΘE est inférieur à Z, ce qu'il fallait démontrer.

7.

Dans deux segments semblables compris entre une droite et une parabole, les centres de gravité divisent les diamètres dans le même rapport.

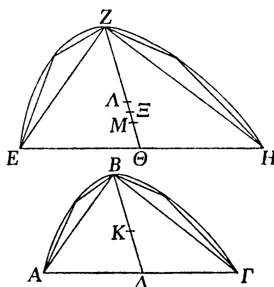


Fig. 54

Soit deux segments ABΓ et EZH tels que nous venons de les définir, BΔ et ZΘ leurs diamètres ; soit

1. Cf. Eucl. V, 8.
2. Cf. prop. I, 8.
3. Cf. I, post. 7.

τὸ Θ, ἐκβληθείσας τᾶς ΕΘ καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας ἐχούσας λόγον ποτὶ τὰν ΕΘ, ὃν τὸ ΑΚΒΛΓ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα], ἐσσεῖται μείζων τᾶς ΘΒ. Ἐχέτω οὖν ἁ ΗΘ ποτὶ ΘΕ. Τὸ Η ἄρα κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων· ὅπερ ἀδύνατον· τᾶς γὰρ διὰ τοῦ Η ἀχθείσας παρὰ τὰν ΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτά ἐστιν [τῷ τμήματι]. Δῆλον οὖν ὅτι ἁ ΘΕ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς Ζ· ἔδει δὲ τοῦτο δεῖξαι.

ζʹ.

Δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὰ κέντρα τῶν βαρέων εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους.

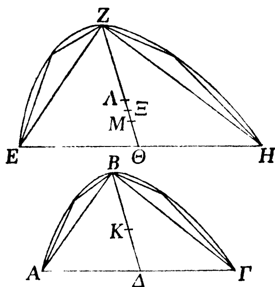


Fig. 54

Ἔστω δύο τμάματα οἷα εἴρηται τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, ὧν διάμετροι αἱ ΒΔ, ΖΘ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ τμάματος

1 ἐκβληθείσας τᾶς ΕΘ mss. DEGH : rectilinei autem akblg signum e ms. ℒ ‖ 3 ἐσσεῖται — 4 ΘΕ mss. DEGH : eius quae ht ad te ms. ℒ ‖ 7 ἐστιν ℒ : ἥστην DEGH ‖ τῷ τμήματι codd. : del. Heiberg ‖ 8 οὖν ℒ : om. DEGH ‖ Ζ · ἔδει δὲ τοῦτο Basil. : ΖΕ δεῖ δὲ τοῦτο DEGH, z et hoc autem opportebat ℒ ‖ 13 τέμνοντι EG : τέμνωντι DH.

K le centre de gravité du segment ΑΒΓ, Λ le centre de gravité du segment EZH. Il faut démontrer que K et Λ divisent les diamètres dans le même rapport.

S'il n'en est pas ainsi (sc. soit M un point pris sur ZΘ de manière) que le rapport de ZM à MΘ soit égal au rapport de KB à KΔ ; inscrivons au segment EZH, d'une manière exacte, une figure rectiligne telle que le segment de droite compris entre le centre de gravité du segment (sc. de parabole) et le centre de gravité de la figure rectiligne soit inférieur[1] à ΛM ; soit Ξ le centre de gravité[2] de la figure rectiligne inscrite ; inscrivons au segment ΑΒΓ une figure rectiligne semblable, — c'est-à-dire semblablement exacte —, à celle qui est inscrite au segment EZH ; dans cette figure le centre de gravité sera plus près du sommet que le centre de gravité du segment, ce qui est impossible[3]. Il est donc évident que le rapport de BK à KΔ est égal au rapport de ZΛ à ΛΘ.

8.

Dans tout segment compris entre une droite et une parabole le centre de gravité divise le diamètre du segment de manière que la partie située du côté du sommet soit égale aux trois demis de la partie située du côté de la base.

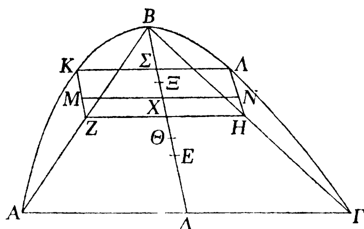


Fig. 55

1. Cf. prop. 6.
2. Le point Ξ est situé entre Λ et M, parce que ΛΞ est par hypothèse inférieur ΛM.
3. Cf. prop. 5.

κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Κ σαμεῖον, τοῦ δὲ ΕΖΗ τὸ Λ. Δεικτέον ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ Κ, Λ.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ἁ ΚΒ ποτὶ ΚΔ, οὕτως ἁ ΖΜ ποτὶ ΜΘ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΕΖΗ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε τὰν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς ΛΜ, καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ξ σαμεῖον, ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ ΑΒΓ τμᾶμα τῷ ἐν τῷ ΕΖΗ [ἐγγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ] ὁμοῖον εὐθύγραμμον [τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως]· οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τᾶς κορυφᾶς ἐγγύτερον ἤπερ τὸ τοῦ τμάματος· ὅπερ ἀδύνατον. Δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΒΚ ποτὶ ΚΔ, ὃν ἁ ΖΛ ποτὶ ΛΘ.

η′.

Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ τὰν τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἁμιόλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος τοῦ ποτὶ τᾷ βάσει.

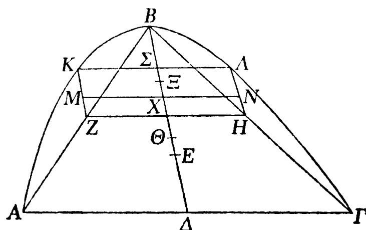


Fig. 55

1 Λ ms. 𝔅 : Δ mss. DEGH ‖ 2 τέμνοντι EG : τέμνωντι DH secantur 𝔅 ‖ τὰς διαμέτρους τὰ Κ, Λ mss. DEGH : quae bd zt ms. 𝔅 ‖ 11 οὗ τὸ Nizzius : οὗ codd. ‖ 12 τὸ 𝔅 : om. DEGH ‖ 19-20 τᾷ βάσει Heiberg : τὰν βάσιν codd.

Soit ΑΒΓ un segment tel que nous l'avons indiqué ; soit ΒΔ son diamètre et Θ son centre de gravité. Il faut démontrer que le segment de droite ΒΘ est égal à une fois et demie le segment de droite ΘΔ.

Inscrivons de manière exacte dans le segment ΑΒΓ le triangle ΑΒΓ ; soit Ε son centre de gravité. Divisons en deux parties égales les deux segments de droite ΑΒ et ΒΓ (sc. par les points Ζ et Η) et menons ΚΖ et ΗΛ (sc. parallèlement à ΒΔ) ; ΚΖ et ΗΛ sont donc les diamètres des segments ΑΚΒ et ΒΛΓ. Soit Μ le centre de gravité[1] du segment ΑΚΒ, Ν celui du segment ΒΛΓ ; menons les droites ΖΗ, ΜΝ et ΚΛ. Le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux segments est donc le point Χ ; et puisque ΚΜ est à ΜΖ comme[2] ΒΘ est à ΘΔ, par composition[3] et par permutation[4] ΔΘ est à ΜΖ comme ΒΔ est à ΚΖ ; mais ΒΔ est le quadruple de ΚΖ, comme nous le démontrerons à la fin à l'endroit marqué par le signe ⸓. Il s'ensuit que ΔΘ est à son tour le quadruple de ΜΖ, de façon que le reste ΒΘ est lui aussi le quadruple du reste ΚΜ, c'est-à-dire[5] de ΣΧ. Par conséquent, la somme des restes ΒΣ et ΧΘ est le triple de ΣΧ. Que le segment de droite ΒΣ soit le triple de ΣΞ ; le segment de droite ΧΘ est alors lui aussi le triple de ΞΧ. Et comme ΒΔ est le quadruple de ΒΣ, — car cela aussi se démontre —, et que ΒΣ est le triple de ΣΞ, le segment de droite ΞΒ est la troisième partie de ΒΔ. Mais le segment de droite ΕΔ est lui aussi la troisième partie de ΔΒ, puisque le point Ε est le centre de gravité[6] du triangle ΑΒΓ. Il s'ensuit que le reste ΞΕ est la troi-

1. Cf. prop. 4.
2. Cf. prop. 7.
3. Cf. Eucl. V, 18.
4. Cf. Eucl. V, 16.
5. Puisque ΚΜΧΣ est un parallélogramme.
6. Cf. prop. I, 14.

Ἔστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα οἷον εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ ΒΔ, κέντρον δὲ τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον. Δεικτέον ὅτι ἁμιολία ἐστὶν ἁ ΒΘ τᾶς ΘΔ.

Ἐγγεγράφθω ἐς τὸ ΑΒΓ τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ Ε, καὶ τετμάσθω δίχα ἑκατέρα τᾶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἄχθων αἱ ΚΖ, ΗΛ· διάμετροι ἄρα ἐντὶ τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων. Ἔστω οὖν τοῦ μὲν ΑΚΒ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ, τοῦ δὲ ΒΛΓ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΗ, ΜΝ, ΚΛ· τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Χ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἁ ΒΘ ποτὶ ΘΔ, οὕτως ἁ ΚΜ ποτὶ ΜΖ, καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ ΚΖ, οὕτως ἁ ΔΘ ποτὶ ΜΖ, τετραπλασία δὲ ἁ ΒΔ τᾶς ΚΖ· τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται, οὗ σαμεῖον ☉· τετραπλασίων ἄρα καὶ ἁ ΔΘ τᾶς ΜΖ· ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ΒΘ λοιπᾶς τᾶς ΚΜ, τουτέστι τᾶς ΣΧ, τετραπλασίων. Καὶ λοιπὰ ἄρα συναμφοτέρα ἁ ΒΣ, ΧΘ τριπλασίων τᾶς ΣΧ. Ἔστω τριπλασία ἁ ΒΣ τᾶς ΣΞ· καὶ ἁ ΧΘ ἄρα τᾶς ΞΧ ἐστὶ τριπλασία. Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἁ ΒΔ τᾶς ΒΣ· καὶ γὰρ τοῦτο δείκνυται· ἁ δὲ ΒΣ τᾶς ΣΞ τριπλασίων, ἁ ΞΒ ἄρα τᾶς ΒΔ τρίτον μέρος ἐστίν. Ἔστιν δὲ καὶ ἁ ΕΔ τᾶς ΔΒ τρίτον μέρος, ἐπειδήπερ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐστὶ τὸ Ε· καὶ λοιπὰ ἄρα

1 οἷον 𝓑 : ὁμοῖον ὡς DEGH ‖ 4 ΑΒΓ ms. 𝓑 : ΑΒΔ mss. DEGH ‖ 5 οὗ DEGH : οὗ τὸ 𝓑 ‖ 6 τᾶν 𝓑 : τῶν G τὰ DEH ‖ ΑΒ, ΒΓ ms. 𝓑 : ΒΑ, ΑΓ mss. DEGH ‖ ΗΛ ms. 𝓑 : ΛΗ ms. G, Η mss. DEH ‖ 9 Ν ms. 𝓑 : Η mss. DEGH ‖ ΖΗ mss. DEGH : om. 𝓑 ‖ 13 ΚΖ Heiberg : τὰν ΚΖ ms. G τᾶς ΚΖ mss. DEH ‖ 13 οὕτως — 14 ΚΖ Eutocius : ita quae td ad mz, quae autem db quadrupla ipsius kz ms. 𝓑 om. DEGH ‖ 14-15 οὗ σαμεῖον ☉ Eutocius : οὗ σαμεῖον ὁ ἥλιος DEGH om. 𝓑 ‖ 16 ΣΧ mss. DEGH : qc ms. 𝓑 ‖ 17 λοιπὰ Heiberg : λοιπὸν DEGH om. 𝓑 ‖ ΒΣ mss. DEGH : cb ms. 𝓑 ‖ 18 τριπλασία H : τριπλᾶ DEG ‖ ΣΞ Heiberg : cx ms. 𝓑 ΕΞ mss. DEGH ‖ 19 ΞΧ ἐστὶ DEGH : qx ms. 𝓑 ‖ ἐστὶν 𝓑 : om. DEGH ‖ 23 ἐστὶ DEGH : om. 𝓑.

sième partie de ΒΔ. Comme, de plus, le centre de gravité du segment entier est le point Θ, celui de la grandeur composée des segments ΑΚΒ et ΒΛΓ le point Χ, et celui du triangle ΑΒΓ le point Ε, le segment de droite ΧΘ sera au segment ΘΕ comme le triangle ΑΒΓ est à la somme des segments qui restent[1]. Mais le triangle ΑΒΓ est équivalent au triple de la somme des segments, puisque le segment entier est équivalent aux quatre tiers du triangle ΑΒΓ ; ΧΘ est donc aussi le triple de ΘΕ. Or il a été démontré que ΧΘ est le triple de ΧΞ ; par conséquent, ΞΕ est le quintuple de ΕΘ, ce qui revient à dire que ΔΕ est le quintuple de ΕΘ, du moment que ΞΕ et ΔΕ sont égaux ; ΔΘ est ainsi sextuple de ΘΕ. De plus, ΒΔ est le triple de ΔΕ ; le segment de droite ΒΘ est donc égal aux trois demis du segment ΘΔ, ce qu'il fallait démontrer.

9.

Quatre segments de droite étant proportionnels en proportion continue, si on se donne un segment tel que son rapport aux trois cinquièmes de l'excès du plus grand des segments proportionnels sur le troisième soit égal au rapport du plus petit de ces segments à l'excès du plus grand sur le plus petit, et un second segment tel que son rapport à l'excès du plus grand des segments proportionnels sur le troisième soit égal au rapport entre la somme du double du segment le plus grand parmi les segments proportionnels, du quadruple du deuxième de ces segments, du sextuple du troisième et du triple du quatrième, d'une part, et, d'autre part,la somme du quintuple du plus grand segment, du décuple du second, du décuple du troisième et du quintuple du quatrième, la somme des deux

1. Cf. prop. I, 8.

ἁ ΞΕ τρίτον μέρος τᾶς ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Χ, τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου τὸ Ε, ἐσσεῖται ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὰ καταλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἁ ΧΘ ποτὶ ΘΕ. Τριπλάσιον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῶν τμαμάτων [ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου]· τριπλασία ἄρα καὶ ἁ ΧΘ τᾶς ΘΕ. Ἐδείχθη δὲ ἁ ΧΘ τριπλασία καὶ τᾶς ΧΞ· πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΞΕ τᾶς ΕΘ, τουτέστιν ἁ ΔΕ τᾶς ΕΘ· ἴσα γάρ ἐστιν αὐτᾳ· ὥστε ἑξαπλασία ἐστὶν ἁ ΔΘ τᾶς ΘΕ. Καί ἐντι τᾶς ΔΕ τριπλασία ἁ ΒΔ· ἁμιολία ἄρα ἐντὶ ἁ ΒΘ τᾶς ΘΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ′.

Εἴ κα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνάλογον ἔωντι ἐν τᾳ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ἐλαχίστα ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰ τρία πεμπταμόρια τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶν ἀνάλογον τᾶς τρίτας, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἁ ἴσα τᾳ τε διπλασίᾳ τᾶς μεγίστας τᾶν ἀνάλογον καὶ τᾳ τετραπλασίᾳ τᾶς δευτέρας καὶ τᾳ ἑξαπλασίᾳ τᾶς τρίτας καὶ τᾳ τριπλασίᾳ τᾶς τετάρτας ποτὶ τὰν ἴσαν τᾳ τε πενταπλασίᾳ τᾶς μεγίστας καὶ τᾳ δεκαπλασίᾳ τᾶς δευτέρας καὶ τᾳ δεκαπλασίᾳ τᾶς τρίτας καὶ τᾳ πενταπλασίᾳ τᾶς τετάρτας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶν ἀνάλογον

6 τριπλάσιον Heiberg : τριπλοῦν codd. et Eutocius || 8 ΧΘ ms. DEGH : tq ms. ℬ || 9 καὶ DEGH : om. ℬ || 13 ὅπερ ἔδει δεῖξαι ℬ et Eutocius : om. DEGH || 17 ᾇ Gℬ : ἇς DEH || 20 διπλασίᾳ Heiberg : β̄ DEGH || ἀνάλογον Basil. : ἀναλογίαν codd. || 25 πενταπλασίᾳ G : πενταπλησίᾳ DEH || 26 τᾶν Torellius : τᾶς DEGH.

segments pris sera égale aux deux cinquièmes du segment le plus grand[1].

Soit quatre segments proportionnels AB, BΓ, BΔ, BE ; (sc. soit ZH un segment tel) que le rapport de ZH aux trois cinquièmes de AΔ soit égal au rapport de BE à EA ; (sc. soit HΘ un segment tel) que le rapport de HΘ à AΔ soit égal au rapport entre la somme de 2 AB, de 4 BΓ, de 6 BΔ et de 3 BE, d'une part, et la somme de 5 AB, de 10 ΓB, de 10 BΔ et de 5 BE d'autre part. Il faut démontrer que ZΘ est égal aux deux cinquièmes de AB.

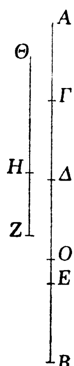


Fig. 56

Puisque, en effet, AB, BΓ, BΔ, BE sont proportionnels, les segments AΓ, ΓΔ, ΔE sont dans le même rapport[2], et le rapport de la somme de AB et de BΓ à BΔ, c'est-à-dire de la double somme de AB et de BΓ au double de BΔ, est égal[3] au rapport de AΔ à ΔE et au rapport de la somme de ΔB et de BΓ à EB et au rapport de tous les segments à tous les segments[4] ; il s'ensuit que le rapport de AΔ à ΔE est égal au rapport entre la somme du double de AB, du triple de ΓB et de ΔB, d'une part, et la somme du double de BΔ et de BE, d'autre part, alors que le rapport entre la somme du double de AB, du quadruple de BΓ, du quadruple de BΔ et du double de BE, d'une part, et la somme du double de ΔB et de EB, d'autre part, est égal au rapport de ΔA à un segment inférieur à ΔE. Soit donc ΔO ce dernier segment. Or la somme de ces derniers segments aura le même rapport aux premières[5] ;

1. Cf. notes compl.

2. C'est-à-dire on a $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$; cf. Eucl. V, 16 et 17.

3. Cf. Eucl. V, 22.

4. D'une façon plus précise : de tous les segments antécédents à tous les segments conséquents.

5. C'est-à-dire on aura : $\frac{A\Delta}{\Delta O} = \frac{2AB+4B\Gamma+4B\Delta+2BE.}{2\Delta B+EB}$

τᾶς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμπταμόρια τᾶς μεγίστας.

Ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ ΒΕ ποτὶ ΕΑ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΖΗ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΑΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ΑΒ καὶ τετραπλασίᾳ τᾶς ΒΓ καὶ ἑξαπλασίᾳ τᾶς ΒΔ καὶ τριπλασίᾳ τᾶς ΒΕ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς ΑΒ καὶ δεκαπλασίᾳ τᾶς ΓΒ καὶ δεκαπλασίᾳ τᾶς ΒΔ καὶ πενταπλασίᾳ τᾶς ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον ἁ ΗΘ ποτὶ τὰν ΑΔ. Δεικτέον ὅτι ἁ ΖΘ δύο πενταμόριά ἐντι τᾶς ΑΒ.

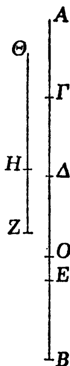


Fig. 56

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν ἐντι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, καὶ αἱ ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί, καὶ συναμφότερος ἁ ΑΒ, ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΔ, τουτέστιν ἁ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΓ ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ΒΔ, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, καὶ συναμφότερος ἁ ΔΒ, ΒΓ ποτὶ τὰν ΕΒ, καὶ πάντα ποτὶ πάντα· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ΑΒ καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ΓΒ καὶ τᾷ ΔΒ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ΒΔ καὶ τᾷ ΒΕ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ΑΒ καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς ΒΓ καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς ΒΔ καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ΒΕ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ΔΒ καὶ τᾷ ΕΒ, τοῦτον ἕξει ἁ ΔΑ ποτὶ ἐλάσσονα τᾶς ΔΕ. Ἐχέτω οὖν ποτὶ ΔΟ. Καὶ ἀμφότεραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι

11 ποτὶ τὰν ΑΔ mss. CDEGH : om. ℒ ‖ 12 ἁ ΖΘ ms. ℒ : τὰ ΑΖΘ mss. CDEGH ‖ 14 ΒΕ mss. ΒΗ : ΔΕ mss. CDEG ‖ 17-18 τὰν διπλασίαν τᾶς ΒΔ, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΑΔ ποτὶ add. Heiberg ‖ 21 καὶ τᾷ ΔΒ Heiberg : καὶ ἁ ΔΒ codd. ‖ 22 τᾷ alt. E : τὰν BCDGH ‖ 23 ΑΒ mss. BC : Β mss. DEGH ‖ καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ BDEGH : καὶ τᾷ $\bar{Δ}$ ms. C ‖ 25 τᾷ alt. E : τὰν BCDGH ‖ 26 ΔΟ Torellius : ΔΘ codd. ‖ 27 δὲ BDEGH : om. C.

le rapport de OA à AΔ sera donc égal[1] au rapport entre la somme de deux AB, de quatre ΓB, de six BΔ et de trois BE, d'une part, et le segment composé de la double somme de AB et de EB et de la quadruple somme de ΓB et BΔ, d'autre part. Mais le rapport de AΔ à HΘ est aussi égal au rapport du segment composé de la quintuple somme de AB et de BE et de la décuple somme de ΓB et de BΔ, d'une part, au segment composé de deux AB, de quatre ΓB, de trois EB et de six BΔ, d'autre part. Or les rapports étant ordonnés d'une manière dissemblable, c'est-à-dire en proportion perturbée, par raison d'identité le rapport de OA à HΘ est égal[2] au rapport du segment composé de la quintuple somme de AB et de BE et de la décuple somme de ΓB et de BΔ, d'une part, au segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de BΔ, d'autre part. Mais le rapport entre le segment composé de la quintuple somme de AB et de BE et de la décuple somme de ΓB et de BΔ, d'une part, et le segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de BΔ, d'autre part, est égal au rapport de cinq à deux ; il s'ensuit que AO est à HΘ dans le rapport de cinq à deux. D'autre part, puisque le rapport de OΔ à ΔA est égal[3] au rapport de la somme de EB et de deux BΔ au segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de BΔ, et que le rapport de AΔ à ΔE est égal au rapport entre la somme de deux AB, de trois ΓB et de BΔ,

1. Cf. Eucl. V, 7, coroll. ; V, 18.
2. Cf. Eucl. V, 23.
3. Cf. Eucl. V, 7, coroll.

λόγον· ἕξει οὖν ἁ ΟΑ ποτὶ ΑΔ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ΑΒ καὶ τετραπλασίᾳ τᾶς ΓΒ καὶ ἑξαπλασίᾳ τᾶς ΒΔ καὶ τριπλασίᾳ τᾶς ΒΕ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρας τᾶς ΑΒ, ΕΒ καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. Ἔχει δὲ καὶ ἁ ΑΔ ποτὶ ΗΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς δεκαπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΒ καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς ΓΒ καὶ τᾶς τριπλασίας τᾶς ΕΒ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΒΔ· ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένᾳ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΟΑ ποτὶ ΗΘ, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς δεκαπλασίας τᾶν ΓΒ, ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ καὶ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. Ἀλλ' ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς πενταπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς δεκαπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο· καὶ ἁ ΑΟ ἄρα ποτὶ ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο. Πάλιν, ἐπεὶ ἁ ΟΔ ποτὶ ΔΑ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΕΒ μετὰ τᾶς διπλασίας τᾶς ΒΔ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ συγκειμένᾳ ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ, ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἁ ΑΔ ποτὶ ΔΕ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΒ καὶ

1 ΟΑ Basil. : ΘΑ mss. BDEGH, ΕΑ ms. C ‖ 2 καὶ τετραπλασίᾳ τᾶς ΓΒ add. Basil. ‖ 12 ἁ ΟΑ Basil. : ἁ ΑΟ ms. G ἁ Α mss. DEH ὁ Α ms. C ‖ 13 πενταπλασία B : ε̄ C, $\overline{\Delta\epsilon}$ mss. DEGH ‖ 14 τᾶν Heiberg : τᾶς CDEGH utriusque B ‖ συγκειμέναν BDEGH : κειμέναν C ‖ 22 ΟΔ Basil. : ΘΔ codd. ‖ 24 τᾷ συγκειμένᾳ CG : τὰν συγκειμέναν BDEH ‖ 26 ΑΔ Basil. : ΔΒ codd.

d'une part, et la somme de EB et de deux BΔ, et comme les rapports sont ordonnés d'une manière dissemblable, c'est-à-dire comme la proportion est perturbée, le rapport de OΔ à ΔE est égal, par raison d'identité[1], au rapport entre la somme de deux AB, de trois BΓ et de BΔ, d'une part, et le segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de BΔ, d'autre part ; par conséquent, le rapport de OE et EΔ est aussi égal[2] au rapport entre la somme de ΓB, de trois BΔ et de deux EB, d'une part, et le segment composé de la double somme de AB et de BE et de la quadruple somme de ΓB et de BΔ. Mais le rapport de ΔE à EB est aussi égal au rapport de AΓ à ΓB, — du moment que par composition[3] (sc. AB est à BΓ comme ΔB est à EB) —, et au rapport de trois ΓΔ à trois ΔB et au rapport de deux ΔE à deux EB ; il s'ensuit que le rapport de la somme de AΓ, de trois ΓΔ et de deux ΔE à la somme de ΓB, de trois ΔB et de deux EB, lui aussi (sc. est égal[4] au rapport de ΔE à EB). Or les rapports étant de nouveau ordonnés d'une manière dissemblable, c'est-à-dire en proportion perturbée, par raison d'identité le rapport de EO à EB est égal au rapport de la somme de AΓ, de trois ΓΔ et de deux ΔE au segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΓB et BΔ ; le rapport du segment entier OB à BE est donc égal[5] au rapport de la somme de trois AB, de six ΓB et de trois BΔ au segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΓB et BΔ. Du

1. Cf. Eucl. V, 23.
2. Cf. Eucl. V, 7, coroll. ; V, 19.
3. Cf. Eucl. V, 17.
4. Puisque $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{2\Delta E}{2EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} = \frac{3\Gamma\Delta}{3\Delta B}$, d'où l'on déduit $\frac{A\Gamma+2\Delta E+3\Gamma\Delta}{\Gamma B+2EB+3\Delta B} = \frac{2\Delta E}{2EB}$.
5. Cf. Eucl. V, 18.

τριπλασίας τᾶς ΓΒ καὶ τᾶς ΒΔ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε ΕΒ καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ΒΔ, ἀνομοίως οὖν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν τεταραγμένας ἐούσας τᾶς ἀναλογίας, δι' ἴσου ὡς ἁ ΟΔ ποτὶ ΔΕ, οὕτως ἁ διπλασία τᾶς ΑΒ μετὰ τᾶς τριπλασίας τᾶς ΒΓ καὶ ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε καὶ ὡς ἁ ΟΕ ποτὶ ΕΔ ἐστίν, οὕτως ἁ ΓΒ μετὰ τᾶς τριπλασίας τᾶς ΒΔ καὶ διπλασίας τᾶς ΕΒ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. Ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἁ ΔΕ ποτὶ ΕΒ, οὕτως ἅ τε ΑΓ ποτὶ ΓΒ, ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν, καὶ ἁ τριπλασία τᾶς ΓΔ ποτὶ τὰν τριπλασίαν τᾶς ΔΒ καὶ ἁ διπλασία τᾶς ΔΕ ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ΕΒ· ὥστε καὶ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς ΑΓ καὶ τριπλασίας τᾶς ΓΔ καὶ διπλασίας τᾶς ΔΕ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς ΓΒ καὶ τριπλασίας τᾶς ΔΒ καὶ διπλασίας τᾶς ΕΒ. Ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένᾳ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ΕΟ ποτὶ ΕΒ, ὃν ἁ ΑΓ μετὰ τᾶς τριπλασίας τᾶς ΓΔ καὶ διπλασίας τᾶς ΔΕ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ· ὅλα οὖν ἁ ΟΒ ποτὶ ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε τριπλασίᾳ τᾶς ΑΒ μετὰ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ΒΔ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ

2 ΒΔ Basil. : ΗΒΔ codd. || 3 τεταγμένων G : dispositis B τετμημένων CDEH || τεταραγμένας BCG : τεταραγμένος DEH || 4 ΟΔ ms. C : ΘΔ mss. BDEGH || διπλασία B : β̄ DEGH, αβ̄ C || 7 τᾶν Heiberg : τᾶς CDEGH om. B || ὡς CDEGH : om. B || ΟΕ ms. C : ΘΕ mss. BDEGH || 8 οὕτως C : ὡς BDEGH || 16 ΔΒ mss. BDEGH : ΒΔ ms. C || 19 ΕΟ ms. C : ΕΘ mss. BDEGH || 20 τριπλασίας τᾶς add. Basil. || τὰν add. Heiberg || 22 ΟΒ ms. C : ΕΒ mss. BDEGH.

moment, d'autre part, que EΔ, ΔΓ, ΓA et les sommes de EB et BΔ, de ΔB et BΓ, de ΓB et BA sont dans le même rapport[1], le rapport de EΔ à ΔA sera égal au rapport de la somme de EB et BΔ à la somme de ΔB, BΓ, ΓB et BA. Par composition donc le rapport de AE à AΔ est égal au rapport du segment composé de la somme de EB et BΔ, de la somme de AB et BΓ et de la somme de ΓB et BΔ, c'est-à-dire du segment composé de la somme de EB et de BA et de la double somme de ΔB et de BΓ, à la somme de BΔ, de BA et de deux BΓ ; il s'ensuit que le rapport du double au double sera aussi le même ; en d'autres termes, EA est à AΔ, comme le segment composé de la double somme de EB et BA et de la quadruple somme de ΓB et BΔ est au segment composé de la double somme de AB et BΔ et du quadruple de ΓB ; par conséquent le rapport de EA aux trois cinquièmes de AΔ sera aussi égal au rapport du segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΓB et BΔ aux trois cinquièmes du segment composé de la double somme de AB et BΔ et du quadruple de ΓB ; mais le rapport de EA aux trois cinquièmes de AΔ est égal[2] au rapport de EB à ZH ; le rapport de EB à ZH est donc égal au rapport du segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΔB et BΓ aux trois cinquièmes du segment composé de la double somme de AB et BΔ et du quadruple de ΓB. Mais on a montré aussi que le rapport de OB à EB est égal au rapport du segment composé de la triple somme de AB et BΔ et du sextuple de ΓB au segment composé de la double somme de AB et BE et de la quadruple somme de ΓB et BΔ.

1. Cf. Eucl. V, 12.

2. Parce que par hypothèse $\frac{EB}{AE} = \frac{ZH}{\frac{3}{5}A\Delta}$; cf. Eucl. V, 16.

αἵ τε ΕΔ, ΔΓ, ΓΑ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντὶ καὶ συναμφότερος ἑκάστα τᾶν ΕΒ, ΒΔ, ΔΒ, ΒΓ, ΓΒ, ΒΑ, ἐσσεῖται καὶ ὡς ἁ ΕΔ ποτὶ ΔΑ, οὕτως συναμφότερος ἁ ΕΒ, ΒΔ ποτὶ συναμφότερον τὰν ΔΒ, ΒΓ μετὰ τᾶς συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΑ. Καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ ΑΕ ποτὶ ΑΔ, οὕτως συναμφότερος ἁ ΕΒ, ΒΔ μετὰ συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΓ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ, ὅ ἐστι συναμφότερος ἁ ΕΒΑ μετὰ τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΔΒΓ ποτὶ συναμφότερον τὰν ΒΔ, ΒΑ μετὰ τᾶς διπλασίας τᾶς ΒΓ· ὥστε καὶ ἁ διπλασία ποτὶ τὰν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, τουτέστιν ὡς ἁ ΕΑ ποτὶ ΑΔ, οὕτως ἁ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΕΒΑ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ μετὰ τᾶς τετραπλασίας τᾶς ΓΒ· ὥστε καὶ ὡς ἁ ΕΑ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΑΔ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΓΒ. Ἀλλ' ὡς ἁ ΕΑ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΑΔ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΕΒ ποτὶ ΖΗ· καὶ ὡς ἄρα ἁ ΕΒ ποτὶ ΖΗ, οὕτως ἁ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΔΒΓ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ μετὰ τᾶς τετραπλασίας τᾶς ΓΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἁ ΟΒ ποτὶ ΕΒ, οὕτως ἁ τριπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ μετὰ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα

5 ἐστὶν CDEGH : om. B ‖ ὡς BC : om. DEGH ‖ ἁ ΑΕ Heiberg : ΑΕ mss. BDEGH, ἁ Ε ms. C ‖ 6 ΑΒ mss. BDEGH : ΔΒ ms. C ‖ 9 ΒΑ ms. C : ΔΑ mss. BDEGH ‖ 14 ΓΒ ms. C : ΓΕ mss. BDEGH ‖ 21-22 οὕτως ἁ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας BDEGH : καὶ ὡς ἄρα ἁ. B ms. C ‖ 25 ΟΒ ms. C : ΑΒ mss. BDEGH.

Par raison d'identité[1], le rapport de OB à ZH est donc égal au rapport du segment composé de la triple somme de AB et BΔ et du sextuple de ΓB aux trois cinquièmes du segment composé de la double somme de AB et BΔ et du quadruple de ΓB. Mais le rapport du segment composé de la triple somme de AB et BΔ et du sextuple de ΓB au segment composé de la double somme de AB et BΔ et du quadruple de ΓB est égal[2] au rapport de trois à deux, alors que son rapport aux trois cinquièmes du dernier segment est égal au rapport de cinq à deux ; mais on a montré que le rapport de AO à HΘ est lui aussi égal au rapport de cinq à deux ; il s'ensuit que le rapport du segment entier BA au segment entier ZΘ est égal[3] au rapport de cinq à deux. Dès lors, ZΘ est égal aux deux cinquièmes de AB, ce qu'il fallait démontrer[4].

10.

Dans tout tronc[5] découpé d'une parabole, le centre de gravité est situé sur le diamètre du tronc, en un point déterminé de la manière que voici : le diamètre ayant été divisé en cinq parties égales, le point (sc. centre de gravité) sera situé sur la cinquième partie du milieu de manière que le rapport du segment partiel, de cette cinquième partie du milieu, qui est plus près de la plus petite base du tronc, au segment partiel restant est égal au rapport du corps solide, ayant pour base le carré sur la plus grande base du tronc et pour hauteur le segment composé du double de la petite base et de la grande base, au corps solide, ayant pour base le carré sur la plus petite des bases du tronc et pour

1. Cf. Eucl. V, 22.
2. Cf. Eucl. VI, 16.
3. Cf. Eucl. V, 12.
4. Cf. notes compl.
5. Par le terme tronc de parabole il faut entendre un fragment de parabole compris entre deux droites parallèles.

ἐστὶν ὡς ἁ ΟΒ ποτὶ ΖΗ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς τριπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΓΒ. Ἀλλὰ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς τριπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ ποτὶ μὲν τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΓΒ λόγον ἔχει, ὃν τρία ποτὶ δύο, ποτὶ δὲ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αὐτᾶς λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο· ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ΑΟ ποτὶ ΗΘ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε ποτὶ δύο· καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΒΑ ποτὶ ὅλαν τὰν ΖΘ λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο. Εἰ δὲ τοῦτο, δύο πεμπταμόριά ἐντι ἁ ΖΘ τᾶς ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι′.

Παντὸς τόμου ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρουμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας ἐστίν, ἃ διάμετρός ἐστι τοῦ τόμου, τόνδε τὸν τρόπον κείμενον· διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας εἰς ἴσα πέντε ἐπὶ μέσου πεμπταμορίου, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τᾶς ἐλάσσονος βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν βάσιων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν συναμφοτέρᾳ τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βάσιων καὶ τᾷ μείζονι, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βάσιων τοῦ

1 ἐστὶν CDEGH : om. B ‖ OB Basil. : EB codd. ‖ 3 τρία DEGH : γ̄ C ‖ 6 ἑξαπλασίας C : ἐκ τοῦ DEGH ex tripla ipsius g b ms. B ‖ 10 AO ms. G : A mss. CDEH, a ms. B ‖ 11 BA Basil. : BΘ mss. CDEH, BΔ mss. BG ‖ 13 δύο BDEGH : om. C ‖ AB mss. CG : ΔB mss. BDEH ‖ ὅπερ ἔδει δεῖξαι B : οι̅ CDEGH ‖ 16 ἃ CG𝔤 : om. DEH ‖ 17 τὸν add. Heiberg ‖ 24 τᾷ C : τῷ EG τὸ D.

hauteur le segment composé du double de la grande base et de la petite base.

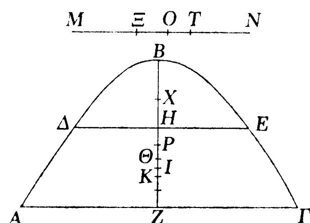


Fig. 57

Soit dans une parabole les deux droites (sc. parallèles) ΑΓ et ΔΕ, et soit ΒΖ le diamètre du segment (sc. de parabole) ΑΒΓ ; il est dès lors clair aussi que dans le tronc ΑΔΕΓ le diamètre[1] est ΗΖ et que ΑΓ et ΔΕ sont parallèles à la tangente au segment en Β ; le segment de droite ΗΖ ayant été divisé en cinq parties égales, soit ΘΚ le cinquième situé au milieu ; que le rapport de ΘΙ à ΙΚ soit égal au rapport du corps solide, ayant pour base le carré sur ΑΖ et pour hauteur la somme de deux ΔΗ et de ΑΖ, au corps solide ayant pour base le carré sur ΔΗ et pour hauteur la somme de deux ΑΖ et de ΔΗ. Il faut démontrer que le centre de gravité du tronc ΑΔΕΓ est le point Ι.

Soit ΜΝ un segment égal à ΖΒ, ΝΟ un segment égal à ΗΒ ; prenons la moyenne proportionnelle ΝΞ

1. Parce que ΔΗ = ΗΕ et ΑΖ = ΖΓ ; cf. *Quadr. parab.*, 1.

τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέρᾳ τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μείζονος καὶ τᾷ ἐλάσσονι αὐτᾶν.

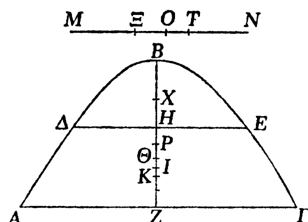


Fig. 57

Ἔστωσαν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΔΕ, διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ ΑΒΓ τμάματος ἁ ΒΖ· φανερὸν δὴ ὅτι καὶ τοῦ ΑΔΕΓ τόμου διάμετρός ἐστιν ἁ ΗΖ [καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΕ παράλληλοί ἐντι τᾷ κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένᾳ τᾶς τομᾶς]· καὶ τᾶς ΗΖ εὐθείας διαιρεθείσας εἰς πέντε ἴσα μέσον ἔστω πεμπταμόριον ἁ ΘΚ, ἁ δὲ ΘΙ ποτὶ τὰν ΙΚ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ΔΗ καὶ τᾷ ΑΖ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ΑΖ καὶ τᾷ ΔΗ. Δεικτέον ὅτι τοῦ ΑΔΕΓ τόμου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Ι σαμεῖον.

Ἔστω δὴ τᾷ μὲν ΖΒ ἴσα ἁ ΜΝ, τᾷ δὲ ΗΒ ἴσα ἁ ΝΟ, καὶ

1 ἀμφοτέρᾳ G : ἀμφοτέρας CDEH ‖ 3 ἐν 𝔛 : om. CDEGH ‖ 5 δὴ C : δὲ DEGH𝔛 ‖ ΑΔΕΓ τόμου διάμετρός ἐστιν ἁ ΗΖ ms 𝔛 : om. CDEGH ‖ 6 καὶ αἱ μὲν Basil. : et quae quidem 𝔛 om. CDEGH ‖ τᾷ CDEGH : om. 𝔛 ‖ 7 ΗΖ ms. 𝔛 : ΕΖ mss. CDEGH ‖ 10 ΑΖ mss. G𝔛 : ΛΖ mss. CDEH ‖ τετράγωνον GH𝔛 : τετραγώνων CDE ‖ 11 ΔΗ mss. G𝔛 : ΖΗ mss. CDEH ‖ 14 ΑΔΕΓ ms. C : ΑΔΓ mss. DEGH, a g d e ms. 𝔛 ‖ 16 ΖΒ mss. C𝔛 : ΖΕ mss. DEGH ‖ ΝΟ Basil. : on ms. 𝔛, ΝΘ mss. CDEGH.

entre MN et NO et la quatrième proportionnelle TN (sc. de MN, NO, NΞ) ; (sc. prenons un point P tel) que le rapport de ZΘ à IP soit égal au rapport de TM à TN, la place du point P n'ayant aucune importance, et ce point pouvant tomber soit entre Z et H, soit entre H et B. Comme ZB est le diamètre du segment d'une parabole, BZ est ou bien l'axe du segment ou bien une parallèle du diamètre, et AZ et ΔH lui sont menées d'une manière ordonnée[1], puisque ces droites sont parallèles à la tangente à la parabole au point B. Dans ces conditions, le carré sur AZ est au carré sur ΔH comme[2] ZB est à BH, c'est-à-dire comme MN est à NO. Mais MN est à NO comme[3] le carré sur MN est au carré sur NΞ ; il s'ensuit que le carré sur AZ est au carré sur ΔH comme le carré sur MN est au carré sur NΞ, d'où il ressort que les segments eux-mêmes sont dans le même rapport[4]. Par conséquent le cube sur AZ est au cube sur ΔH comme le cube sur MN est au cube sur NΞ. Mais le rapport du cube sur AZ au cube sur ΔH est égal[5] au rapport du segment (sc. de parabole) ABΓ au segment ΔBE, et le rapport du cube sur MN au cube sur NΞ est égal[6] au rapport de MN à NT, de façon que, par décomposition[7], le tronc AΔEΓ est au segment (sc. de parabole) ΔBE comme[8] MT est à NT, c'est-à-dire comme trois cinquièmes de HZ sont à IP. Comme, d'autre part, le rapport du corps solide, ayant pour base le carré sur AZ et

1. Cf. Apollonius, *Con.* I, déf. 4.
2. Cf. *Quadr. parab.* 3 ; Apollonius, *Con.* I, 20.
3. Cf. Eucl. V, déf. 9.
4. C'est-à-dire que $\frac{AZ}{\Delta H} = \frac{MN}{N\Xi}$.
5. Cf. *Quadr. parab.*, prop. 24.
6. On a en effet $\frac{\overline{MN}^2}{\overline{N\Xi}^2} = \frac{N\Xi}{TN}$ et $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{MN}{N\Xi}$; en multipliant ces deux égalités, on obtient $\frac{\overline{MN}^3}{\overline{N\Xi}^3} = \frac{MN}{NT}$.
7. Cf. Eucl. V, 17.
8. Puisque, par hypothèse, $\frac{MT}{NT} = \frac{Z\Theta}{IP}$, et $Z\Theta = \frac{3}{5}$ HZ.

λελάφθω τᾶν μὲν ΜΝΟ μέσα ἀνάλογον ἁ ΝΞ, τετάρτα δὲ ἀνάλογον ἁ ΤΝ, καὶ ὡς ἁ ΤΜ ποτὶ ΤΝ, οὕτως ἁ ΖΘ ποτί τινα ἀπὸ τοῦ Ι, ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμεῖον · οὐδὲν γὰρ διαφέρει εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν Ζ, Η εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν Η, Β · τὰν ΙΡ. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ διάμετρός ἐστι τοῦ τμάματος ἁ ΖΒ, ἁ ΒΖ ἤτοι ἀρχικά ἐστι τᾶς τομᾶς ἢ παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται, αἱ δὲ ΑΖ, ΔΗ εἰς αὐτὰν τεταγμένως ἐντὶ καταγμέναι, ἐπειδὴ παράλληλοί ἐντι τᾷ ἐπὶ τοῦ Β τᾶς τομᾶς ἐφαπτομένᾳ. Εἰ δε τοῦτο, ἔστιν ὡς ἁ ΑΖ ποτὶ ΔΗ δυνάμει, οὕτως ἁ ΖΒ ποτὶ ΒΗ μάκει, τουτέστιν ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΟ. Ὡς δὲ ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΟ μάκει, οὕτως ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΞ δυνάμει · καὶ ὡς ἄρα ἁ ΑΖ ποτὶ ΔΗ δυνάμει, οὕτως ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΞ δυνάμει · ὥστε καὶ μάκει ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Καὶ ὡς ἄρα ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ ΜΝ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΝΞ κύβον. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως τὸ ΑΒΓ τμᾶμα ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, ὡς δὲ ὁ ἀπὸ ΜΝ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΝΞ κύβον, οὕτως ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΤ · ὥστε καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, οὕτως ἁ ΜΤ ποτὶ ΝΤ, τουτέστι τὰ $\bar{\gamma}$ ε′ τᾶς ΗΖ ποτὶ ΙΡ. Καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν

1 ΜΝΟ ms. 𝔅 : ΜΝΘ mss. CDEGH ‖ ΝΞ ms. C : ΜΞ mss. DEGH𝔅 ‖ 3 ἂν Basil. : ἐὰν codd. ‖ ἕτερον C𝔅 : στερεὸν DEGH ‖ 4 καὶ CDEGH : om. 𝔅 ‖ 4-5 Ζ, Η εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν DEGH𝔅 : om. C ‖ 5 κώνου DEGH𝔅 : κωνίου C ‖ 6 ἁ ΖΒ, ἁ ΒΖ mss. DEGH𝔅 : $\overline{\alpha\zeta}$ $\overline{\beta\eta}$ $\overline{\beta\zeta}$ ms. C ‖ 7 ἀρχικά Heiberg : ἀρχική CEGH ἀρχηκή D𝔅 ‖ 8 ἐντὶ Heiberg : εἰσὶ DEGH εἰσὶν C ‖ καταγμέναι DEGH𝔅 : κατηγμένη C ‖ 9 ἐντι Heiberg : εἰσιν DEGH εἰσι C om. 𝔅 ‖ ἐπὶ Heiberg : ἀπὸ codd. ‖ ἐφαπτομένᾳ GH : ἐφαπτομένῃ C ἐφαπτόμεναι DE𝔅 ‖ 11 ΜΝ mss. DEGH𝔅 : ΜΛ ms. C ‖ 11-12 ποτὶ ΝΟ. Ὡς δὲ ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΟ μάκει, οὕτως ἁ ΜΝ mss. C𝔅 : om. DEGH ‖ 20 τόμος C : τομεὺς DEGH ‖ ΔΒΕ Basil. : ΔΒ codd. ‖ 21 $\bar{\gamma}$ ε′ Heiberg : $\overline{\gamma\varepsilon}$ CDEGH, τὰ Γ ms. 𝔅 ‖ ΙΡ Torellius : ΝΤ codd. ‖ ἐπεὶ DEGH𝔅 : ἐπὶ C.

pour hauteur la somme de deux ΔH et de AZ, au cube sur AZ est égal[1] au rapport de la somme de deux ΔH et de AZ à ZA, et par conséquent aussi au rapport de la somme de deux NΞ et de NM à NM, que le rapport du cube sur AZ au cube sur ΔH est égal au rapport de MN à NT, et que, enfin, le rapport du cube sur ΔH à la figure solide ayant pour base le carré sur ΔH et pour hauteur la somme de deux AZ et de ΔH est égal[2] au rapport de ΔH à la somme de deux AZ et de ΔH, et par conséquent aussi égal au rapport de TN à la somme de deux ON et de TN, nous avons quatre grandeurs, à savoir la figure solide ayant pour base le carré sur AZ et pour hauteur la somme de deux ΔH et de AZ, le cube sur AZ, le cube sur ΔH, et la figure solide ayant pour base le carré sur ΔH et pour hauteur la somme de deux AZ et de ΔH, et ces quatre grandeurs sont proportionnelles à quatre (sc. autres) grandeurs prises deux à deux, qui sont le segment composé du double de NΞ et de NM, en second lieu le segment MN, troisièmement le segment NT et, enfin, le segment composé du double de NO et de NT ; par raison d'identité[3], donc, le rapport de la figure solide, ayant pour base le carré sur AZ et pour hauteur le segment composé du double de ΔH et de AZ, à la figure solide, ayant pour base le carré sur ΔH et pour hauteur le segment

1. Parce que $\frac{AZ}{\Delta H} = \frac{MN}{N\Xi}$.

2. Parce que $\frac{AZ}{\Delta H} = \frac{MN}{N\Xi} = \frac{NO}{TN}$; cf. Eucl. V, 16.

3. Cf. Eucl. V, 22.

συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΔΗ καὶ τᾶς ΑΖ, ποτὶ τὸν ἀπὸ ΑΖ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἁ διπλασία τᾶς ΔΗ μετὰ τᾶς ΑΖ ποτὶ ΖΑ, ὥστε καὶ ὃν ἁ διπλασία τᾶς ΝΞ μετὰ τᾶς ΝΜ ποτὶ ΝΜ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΤ, ὡς δὲ ὁ ἀπὸ ΔΗ κύβος ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ μετὰ τᾶς ΔΗ, οὕτως ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς ΔΗ, ὥστε καὶ ἁ ΤΝ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΟΝ καὶ τᾶς ΤΝ, γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθεα, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΔΗ καὶ τᾶς ΑΖ, καὶ ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος καὶ ὁ ἀπὸ ΔΗ κύβος καὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς ΔΗ, τέτταρσι μεγέθεσιν ἀνάλογον σύνδυο λαμβανομένοις, τᾷ τε συγκειμένᾳ ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ΝΜ καὶ ἑτέρῳ μεγέθει τᾷ ΜΝ καὶ ἄλλῳ ἑξῆς τᾷ ΝΤ καὶ τελευταῖον τᾷ συγκειμένᾳ ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΟ καὶ τᾶς ΝΤ· δι' ἴσου ἄρα γενήσεται ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΔΗ καὶ τᾶς ΑΖ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν

2 ὃν add. Torellius || 5 ΔΗ mss. C𝔅 : ΔΝ mss. DEGH || δὲ ὁ DEGH𝔅 : τε C || 8 διπλασίας τᾶς 𝔅 : β̄ τῆς C τῆς DH om. EG || 9 διπλασίας τᾶς Heiberg : β̄ τῆς C τᾶς DH om. EG𝔅 || 10-11 διπλασίας τᾶς CDEGH : om. 𝔅 || 13 διπλασίας C : διπλᾶς DEGH || 14 καὶ ὁ ἀπὸ ΑΖ ms. 𝔅 : om. CDEGH || 16 διπλασίας C𝔅 : διπλασίας καὶ DEGH || 19 ἑτέρῳ μεγέθει 𝔅 : ἑτέρου μεγέθεος C τοῦ ἑτέρου μεγέθεος DEGH || τᾷ C : τῆς DEGH || ἄλλῳ Heiberg : ἄλλο codd. || τᾷ Heiberg : ἡ codd. || ΝΤ ms. 𝔅 : ΝΓ mss. CDEGH || 20 τᾷ συγκειμένᾳ Torellius : ἡ συγκειμένη codd. || διπλασίας 𝔅 : β'Η mss. DG, $\overline{\text{ΒΗ}}$ mss. CEH || 22 τετράγωνον DEGH𝔅 : τετράγωνος C.

composé du double de AZ et de ΔH, est égal au rapport du segment de droite composé du double de NΞ et de MN au segment composé du double de NO et de NT. Mais le rapport entre les deux figures solides indiquées est égal au rapport de ΘI à IK ; il s'ensuit que le rapport entre les deux segments composés est lui aussi égal au rapport de ΘI à IK. Par composition[1], donc, et les antécédents étant multipliés par cinq, le rapport de ZH à IK est égal[2] au rapport du segment, composé de la quintuple somme de MN et NT et de la décuple somme de NΞ et NO, au segment composé du double de ON et de NT. De plus, le rapport de ZH à ZK est égal, puisque ZK est égal[3] aux deux cinquièmes de ZH, au rapport du segment, composé de la quintuple somme de MN et NT et de la décuple somme de ΞN et NO, au segment composé de la double somme de MN et NT et de la quadruple somme de ΞN et NO ; le rapport de ZH à ZI sera donc égal au rapport du segment composé de la quintuple somme de MN et NT et de la décuple somme de ΞN et NO au segment composé du double de MN, du quadruple de NΞ, du sextuple de ON et du triple de NT. Or du moment que les quatre segments MN, NΞ, ON et NT sont en proportion continue, que NT est à TM comme le segment pris PI est aux trois cinquièmes de ZH, c'est-à-dire[4] de MO, et que, enfin, le rapport du segment, composé du double de NM, du quadruple de NΞ, du sextuple de NO et du triple de NT, au segment, composé de la quintuple somme de MN et NT et de la décuple somme de ΞN et NO, est égal au rapport de

1. Cf. Eucl. V, 18.
2. Puisque ZH = 5ΘK.
3. De plus : $\frac{5(MN+NT)+10(N\Xi+NO)}{2(MN+NT)+\ 4(N\Xi+NO)}=\frac{5}{2}$; cf. Eucl. VI, 16.
4. Puisque MO = MN — NO = ZB — HB = ZH.

συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς ΔΗ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ΜΝ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΟ καὶ τᾶς ΝΤ. Ἀλλ' ὡς τὸ εἰρημένον στερεὸν ποτὶ τὸ εἰρημένον στερεόν, οὕτως ἁ ΘΙ ποτὶ ΙΚ· καὶ ὡς ἄρα ἁ ΘΙ ποτὶ ΙΚ, οὕτως ἁ συγκειμένα ποτὶ τὰν συγκειμέναν· Ὥστε καὶ συνθέντι καὶ τῶν ἁγουμένων τὰ πενταπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΖΗ ποτὶ ΙΚ, οὕτως ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΝΞ, ΝΟ ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ΟΝ καὶ τὰν ΝΤ. Καὶ ὡς ἁ ΖΗ ποτὶ ΖΚ ἐοῦσαν αὐτᾶς δύο πέμπτα, οὕτως ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ· ἐσσεῖται οὖν ὡς ἁ ΖΗ ποτὶ ΖΙ, οὕτως ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΜΝ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΟΝ καὶ τριπλασίας τᾶς ΝΤ. Ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΟΝ, ΝΤ, καί ἐστιν, ὡς μὲν ἁ ΝΤ ποτὶ ΤΜ, οὕτως λελαμμένα τις ἁ ΡΙ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΖΗ, τουτέστι τᾶς ΜΟ, ὡς δὲ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΜ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΝΟ καὶ τριπλασίας τᾶς ΝΤ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς πενταπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ, οὕτως ἑτέρα τις

1-2 τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς ΔΗ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας C : om. DEGHℒ ‖ 5-6 καὶ ὡς ἄρα ἁ ΘΙ ποτὶ ΙΚ mss. DEGHℒ : om. C ‖ 7 πενταπλάσια Heiberg : ε̅ CDEGH sequentia ℒ ‖ 8 πενταπλασία ℒ : ε̅ C om. DEGH ‖ 10 τὰν alt. add. Basil. ‖ 11 ἁ pr. om. ℒ ‖ 13 ΞΝΟ Torellius : ΝΞΟ codd. ‖ 15 ἁ pr. Heiberg : ἡ C om. DEGHℒ ‖ 18 τᾶς pr. Heiberg : τῆς CDEGH om. ℒ ‖ 20 ΜΝ, ΝΞ, ΟΝ, ΝΤ Heiberg : ΜΝΞ ΟΝΤ codd. ‖ 24 ΝΟ ms. ℒ : ΝΘ mss. CDEGH.

l'autre segment pris IZ à ZH, c'est-à-dire à MO, le segment PZ sera, en vertu de ce qui a été démontré plus haut[1], égal aux deux cinquièmes de MN, c'est-à-dire de ZB ; le centre de gravité du segment ABΓ est donc[2] le point P. Soit X le centre de gravité du segment ΔBE. Le centre de gravité du tronc AΔEΓ sera donc situé sur le prolongement de XP, à l'extrémité d'un segment dont le rapport à XP est égal au rapport du tronc au reste du segment de parabole[3]. Or c'est le point I (sc. qui répond à ces conditions). Du moment, en effet, que BP est égal aux trois cinquièmes de ZB, et BX égal aux trois cinquièmes de HB, XP (sc. qui est la différence entre BP et BX) est égal aux trois cinquièmes du segment de reste HZ (sc. entre ZB et HB). Dès lors, comme le tronc AΔEΓ est au segment ΔBE comme MT est à TN, et que MT est à TN comme trois cinquièmes de HZ, c'est-à-dire comme XP, est à PI, le rapport du tronc AΔEΓ au segment ΔBE est lui aussi égal au rapport de XP à PI. De plus, le centre de gravité du segment entier est le point P, et celui du segment ΔBE est le point X ; il est donc évident que le centre de gravité du tronc AΔEΓ est le point I[4].

1. Cf. prop. 9.
2. Cf. prop. 8.
3. Cf. prop. I, 8.
4. Cf. prop. I, 6 et 7.

λελαμμένα ἁ ΙΖ ποτὶ τὰν ΖΗ, τουτέστιν ποτὶ τὰν ΜΟ, ἐσσεῖται διὰ τὰ πρότερον ἁ ΡΖ δύο πέμπτα τᾶς ΜΝ, τουτέστι τᾶς ΖΒ· ὥστε κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ ΑΒΓ τμάματος τὸ Ρ σαμεῖον. Ἔστω δὴ καὶ τοῦ ΔΒΕ τμάματος κέντρον βάρεος τὸ Χ σαμεῖον. Τοῦ ἄρα ΑΔΕΓ τόμου ἐσσεῖται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ἐπ᾿ εὐθείας τᾷ ΧΡ τὸν αὐτὸν ποτὶ αὐτὰν λόγον ἐχούσας, ὃν ἔχει ὁ τόμος ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα. Ἔστιν δὲ τὸ Ι σαμεῖον. Ἐπεὶ γὰρ τᾶς μὲν ΖΒ τρία πέμπτα ἐστὶν ἁ ΒΡ, τᾶς δὲ ΗΒ τρία πέμπτα ἐστὶν ἁ ΒΧ, καὶ λοιπᾶς ἄρα τᾶς ΗΖ τρία πέμπτα ἐστὶν ἁ ΧΡ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, οὕτως ἁ ΜΤ ποτὶ ΤΝ, ὡς δὲ ἁ ΜΤ ποτὶ τὰν ΤΝ, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΗΖ, ἅτις ἐστὶν ἁ ΧΡ, ποτὶ ΡΙ, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ὡς ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, οὕτως ἁ ΧΡ ποτὶ ΡΙ. Καί ἐστι τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ρ σαμεῖον, τοῦ δὲ ΔΒΕ κέντρον βάρεος τὸ Χ· φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τοῦ ΑΔΕΓ τόμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ι σαμεῖον.

5 ἄρα add. Torellius ‖ 6 τᾷ Heiberg : τῆς codd. ‖ 7 τόμος Heiberg : τομεὺς codd. ‖ 11 τόμος Heiberg : τομεὺς codd. ‖ 13 ΗΖ mss. C𝔛 : ΝΖ mss. DEGH ‖ 14 τόμος Heiberg : τομεὺς codd. ‖ 15-16 ΡΙ. Καί ἐστι τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον 𝔛 : om. CDEGH ‖ 17 ΑΔΕΓ ms. 𝔛 : ΑΒΕΓ mss. CDEGH ‖ τόμου Heiberg : τομέως codd.

L'ARÉNAIRE

NOTICE

Dans ce traité, Archimède se propose de relever le défi d'une vieille locution proverbiale, formulée par Pindare en ces termes : « le sable échappe au nombre »[1].

Si l'opinion populaire des Grecs désespérait de pouvoir exprimer, par des nombres, des multitudes dépassant une certaine limite, cela provenait de ce que leur numération courante s'arrêtait à un chiffre, la myriade, qui pouvait suffire, grâce à des multiplications, simples ou répétées, pour évaluer les effectifs, en hommes et en chevaux, d'une armée, même immense aux yeux des Grecs, comme celles des Perses lors des guerres médiques, mais qui s'avérait rapidement impuissant pour exprimer des quantités comme celle des grains contenus dans un amas de sable. La langue grecque ne diffère d'ailleurs pas essentiellement, sous ce rapport, de nos langues modernes. Nous parons aujourd'hui à l'insuffisance du vocabulaire arithmétique courant, y compris les néologismes par lesquels on a essayé d'élargir le pouvoir d'expression du nombre, en faisant appel à l'algorithme des exposants, 10^n, 10^{n+1}, etc.

Pour s'affranchir de son côté des limites imposées à la numération par le langage courant, Archimède invente un système de notations comparable à nos systèmes de puissances de 10, où il distingue les « premiers nombres », de 1 à mille myriades ou 10^8, les

1. Ψάμμος ἀριθμὸν περιπέφευγεν, IIe *Olymp.*, fin ; cf. Homère : οὐδ' εἴ μοι τόσα δοίη, ὅσα ψάμαθός τε κόνις τε, *Il.* IX, 385.

« nombres seconds », dans lesquels 10^8 constitue la nouvelle unité et qui vont de 10^8, à travers 2.10^8, 3.10^8, etc., à $10^8.10^8$ ou 10^{16}, les « nombres troisièmes », de 10^{16} à $10^8.10^{16} = 10^{24}$, et ainsi de suite jusqu'aux nombres (10^8)ièmes, dont le dernier est $A = 10^{8 \cdot 10^8}$.

Les nombres indiqués jusqu'ici suffiraient largement pour l'évaluation précise qu'Archimède propose au roi Gélon. Mais pour démontrer jusqu'au bout le pouvoir expressif de son système arithmétique il imagine des entités encore plus grandes. Envisageant les nombres de 1 à $10^{8 \cdot 10^8} = A$ comme formant une première période, il définit la deuxième période comme étant composée des nombres de A à A^2 et comme comprenant une suite de premiers nombres allant de A à une myriade de myriades de A, c'est-à-dire de A à 10^8A, suivie d'une suite de nombres seconds allant de 10^8A à $10^{16}A$, et ainsi de suite jusqu'à une suite de nombres (10^8)ièmes allant de $10^{8(10^8-1)}$ A à $10^{8 \cdot 10^8}$ $A = A^2$, la troisième période comme composée des nombres de A^2 à A^3, et ainsi de suite jusqu'à la (10^8)ième période comprenant les nombres de A^{10^8-1} à A^{10^8}, ce dernier nombre étant égal à $10^{8 \cdot 10^{16}}$.

Mais l'intérêt de l'*Arénaire* ne s'épuise pas dans cette imposante création de notations arithmétiques nouvelles. S'étant fait fort d'exprimer le nombre des grains de sable que pourrait contenir le cosmos, Archimède commence par définir la réalité qu'on appelle cosmos et par indiquer les dimensions qu'il lui prête. Pour prévenir l'objection qu'il se serait facilité la tâche en choisissant un cadre cosmique trop exigu comme réceptacle fictif de son sable, il force les dimensions du monde telles qu'elles étaient admises par ses devanciers et ses contemporains, ce qui est pour lui l'occasion de quelques remarques et allusions d'un grand intérêt pour l'histoire des sciences.

En ce qui concerne d'abord la définition du cosmos, selon « la plupart des astronomes », comme étant la sphère ayant pour centre le centre de la terre et pour rayon la droite joignant le centre de la terre à celui

du soleil[1], nous ignorons quels sont les astronomes et les systèmes visés par Archimède. Ce qui est certain d'après cette remarque, c'est que les définitions anciennes du cosmos, telles qu'on les rencontre encore chez Platon[2] et chez Aristote[3], avaient été abandonnées vers 250 avant J.-C. par beaucoup d'astronomes. Chez Platon et chez Aristote, la limite du cosmos s'était confondue avec celle de l'univers, c'est-à-dire avec la sphère des fixes, au-delà de laquelle il n'y avait plus rien, même pas le vide, puisque, d'après Parménide, suivi en ce point par les deux penseurs, le non-être, n'étant pas pensable, ne pouvait exister. La nouvelle définition du monde est fondée sur une distinction qui dispensait désormais les astronomes de toute spéculation sur les limites du réel et de l'option entre Parménide et Démocrite, à savoir sur la dissociation de la représentation de l'univers, τὸ πᾶν, et celle du monde, ὁ κόσμος.

Mais le réceptacle fictif du sable dont Archimède se propose de calculer la quantité n'est pas le cosmos ainsi défini, ni même celui qui lui correspondrait dans le système héliocentrique récemment découvert, mais bien l'univers, le πᾶν des anciens, dont il évalue les dimensions en se fondant sur les indications d'Aristarque de Samos. La page où Archimède discute les données de ce système est le témoignage le plus ancien que nous ayons de la réforme héliocentrique du « Copernic de l'antiquité ». Le seul ouvrage conservé d'Aristarque, qui fut à peu près contemporain d'Archimède, le traité *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune*[4], ne contient aucune allusion à l'initiative hardie du savant astronome. Parmi les autres astronomes, anciens ou contemporains, ayant publié des travaux sur les dimensions et les distances des corps célestes, Archimède

1. Cf. le commencement du traité.
2. En particulier dans le *Timée*.
3. Dans le *De caelo* et *passim*.
4. Édition critique, avec traduction anglaise, par Th. L. Heath, Oxford 1913.

cite Eudoxe de Cnide, le célèbre inventeur des « sphères homocentriques » destinées à « sauver les apparences célestes », qui avait déclaré le diamètre du soleil neuf fois plus grand que celui de la lune, et Phidias, père d'Archimède, qui lui avait prêté une longueur de douze diamètres de la lune, et il fait allusion probablement à Dicéarque de Messine, astronome de la seconde moitié du IVe siècle, par sa remarque que certains ont essayé de démontrer que le périmètre de la terre est de trente myriades de stades.

Archimède lui-même apparaît dans ce chapitre du traité comme un astronome de marque[1], en particulier par la précision avec laquelle il détermine le diamètre apparent du soleil. La description minutieuse du dispositif, construit par lui en vue de ses mesures, et de ses opérations de visée est une des rares pages de technologie grecque qui nous font assister à une expérience physique.

1. D'après la tradition, Archimède est l'auteur d'un traité sur la construction de sphères célestes, Περὶ σφαιροποιίας, cf. Carpus, dans Pappus, *Coll.*, VIII, 3, et Proclus, *In Eucl.*, éd. Friedlein, p. 41. Cicéron nous a laissé des descriptions du planétarium construit par Archimède, cf. *De re publ.*, I, 21, 22 ; *Tusc.*, I, 63 ; *De natura deorum*, II, 88.

L'ARÉNAIRE

I. Certains estiment, roi Gélon[1], que le nombre des grains de sable est infiniment grand[2], et j'entends non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui est répandu dans toute terre, habitée ou inculte. D'autres, tout en admettant que ce nombre n'est pas infiniment grand, pensent qu'il n'existe pas de nombre exprimable assez grand pour dépasser la quantité des grains de sable. Cependant, si ceux qui sont de cet avis s'imaginaient un volume de sable égal à celui de la terre, ce volume comprenant toutes les mers et les vallées de la terre remplies de sable jusqu'aux plus hautes montagnes, il est évident qu'ils reconnaîtraient encore beaucoup moins qu'on puisse énoncer un nombre dépassant le nombre de ces grains de sable. Or je tâcherai de te montrer, par des démonstrations géométriques que tu pourras suivre, que parmi les nombres que j'ai énoncés et exposés dans mes écrits adressés à Zeuxippe, il y en a qui dépassent non seulement le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la terre remplie de la manière que nous

1. Gélon, fils de Hiéron, roi de Syracuse, partageait le pouvoir avec son père et portait le titre de roi.
2. Cf. *Notice*, début.

ΨΑΜΜΙΤΗΣ

I. Οἴονταί τινες, βασιλεῦ Γέλων, τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει· λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ Συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν τάν τε οἰκημέναν καὶ τὰν ἀοίκητον. Ἐντί τινες δέ, οἳ αὐτὸν ἄπειρον μὲν εἶμεν οὐχ ὑπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρχειν ἀριθμόν, ὅστις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. Οἱ δὲ οὕτως δοξάζοντες δῆλον ὡς, εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον ὄγκον συγκείμενον τὸ μέγεθος, ἁλίκος ὁ τᾶς γᾶς ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελάγεων πάντων καὶ τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς εἰς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὀρέων, πολλαπλασίως μὴ γνώσονται μηδένα κα ῥηθῆμεν ἀριθμὸν ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. Ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαί τοι δεικνύειν δι' ἀποδείξιων γεωμετρικᾶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν καὶ ἐκδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις ὑπερβάλλοντί τινες οὐ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος

2 ἀριθμὸν D : om. EGH || 3 τοῦ Basil. : τὸν DEGH || 6 ἐντί Riualtus : ἐν DEGH || οἳ Riualtus : om. DEGH || μὲν εἶμεν Torellius : ἠένιμεν DEGH || 7 ὑπολαμβάνοντι EG : ὑπολαμβάνωντι DH || 8 ἀριθμόν add. Heiberg || 10 τὸ μέγεθος Heiberg : τὰ μὲν codd. || 11 ἁλίκος Wallis : ἁλίκαν codd. || τᾶς Wallis : πᾶς codd. || γᾶς Wallis : γὰρ codd. || 12 εἰς add. Heiberg || 13 ὀρέων EG : ὠρέων DH || 14 μὴ γνώσονται Heiberg : μήγουσίν τε codd. || μηδένα κα ῥηθῆμεν ἀριθμὸν Heiberg : μηδένα κάρη ἔμμεναι codd. || 15 τοι Hultsch, Gertz : του codd. || 17 ἐκδεδομένων Wallis : ἐνδεδομένον DH ἐνδεδομένων EG.

avons indiquée, mais même (sc. le nombre des grains de sable) ayant un volume égal à celui du monde. Or tu te souviens que par le terme monde la plupart des astronomes désignent la sphère ayant pour centre le centre de la terre et pour rayon la droite comprise entre le centre du soleil et le centre de la terre, car tu auras appris cela dans les démonstrations qu'écrivent les astronomes. Aristarque de Samos, cependant, a publié quelques hypothèses desquelles se déduisent pour le monde des dimensions beaucoup plus grandes que celles que nous venons de dire. Il suppose[1] en effet que les étoiles fixes et le soleil restent immobiles, que la terre tourne autour du soleil sur une circonférenc de cercle, le soleil occupant le centre de cette trajectoire, et que la sphère des fixes, qui s'étend autour du même centre que le soleil, a une grandeur telle que le rapport du cercle, sur lequel il suppose que la terre tourne, à la distance des étoiles fixes est comparable au rapport du centre de la sphère à sa surface. Ceci, certes, est impossible de toute évidence ; car du moment que le centre de la sphère n'a aucune grandeur[2], il faut admettre qu'il n'a aucun rapport, non plus, à la surface de la sphère. Mais on peut croire que le raisonnement d'Aristarque est le suivant : puisque nous admettons que la terre est en quelque sorte le centre du monde, le rapport de la terre à ce que nous appelons communément le monde est égal au rapport de la sphère, contenant le cercle sur lequel il suppose que la terre tourne,

1. Dans un ouvrage perdu, *Les Hypothèses*, de 260 avant J.-C.
2. Cf. Eucl. I, déf. 1.

ἴσον τᾷ γᾷ πεπληρωμένᾳ, καθάπερ εἴπαμες, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. Κατέχεις δὲ διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἇς ἐστι κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα τᾷ εὐθείᾳ τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς · ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων δείξεσι διάκουσας. Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ὑποθέσιών τινων ἐξέδωκεν γραφάς, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. Ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανέα τῶν ἄστρων καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει τηλικαύταν εἶμεν, ὥστε τὸν κύκλον, καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τᾶς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. Τοῦτό γ' εὔδηλον ὡς ἀδύνατόν ἐστιν · ἐπεὶ γὰρ τὸ τᾶς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέγεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαίρας ὑπολαπτέον αὐτό. Ἐκδεκτέον δὲ τὸν Ἀρίσταρχον διανοεῖσθαι τόδε · ἐπειδὴ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομες ὥσπερ εἶμεν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἁ γᾶ ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾇ ἐστιν ὁ κύκλος, καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων

2 μέγεθος G : μεγέθους DEH || 5 ἐκ add. Wallis || ἴσα Wallis : lac. codd. || τᾷ εὐθείᾳ Riualtus : αἱ εὐθεῖαι codd. || 7 δείξεσι διάκουσας Heiberg : διάκρουσας codd. || 8 δὲ add. Heiberg || 9 γραφάς Bergk et Heiberg : γράψας codd. || 16 ὥστε Basil. : ἔστω codd. || ὃν Basil. : οὗ codd. || 20 τὸ G : τὰ DEH || 22 αὐτό G : αὐτόν DEH || 23-24 ὥσπερ εἶμεν Heiberg : ὡς περὶ μὲν codd. || 26 ὃν Basil. : οὗ codd.

à la sphère des fixes[1] ; il adapte en effet ses démonstrations des apparences (sc. célestes) à une hypothèse de ce genre, et il semble surtout supposer la grandeur de la sphère, sur laquelle il fait tourner la terre, égale à la réalité que nous appelons communément le monde. Je dis dès lors que, même s'il y avait une sphère composée de sable ayant la grandeur que les hypothèses d'Aristarque prêtent à la sphère des fixes, on pourrait démontrer que parmi les nombres susceptibles d'expression, dont il a été question au début, certains dépassent par leur grandeur le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la sphère indiquée, et cela avec les hypothèses que voici.

1. Nous admettrons d'abord que le périmètre de la terre a une longueur de trois cents myriades de stades, et pas davantage, bien que certains[2] aient essayé de démontrer, comme toi aussi tu as pu l'apprendre, que cette longueur est de trente myriades de stades. Mais moi, dépassant ce nombre et posant les dimensions de la terre dix fois plus grandes que celles qu'avaient évaluées mes prédécesseurs, je suppose que son périmètre est de trois cents myriades de stades, et pas davantage[3].

2. (Sc. Nous admettrons) en second lieu que le diamètre de la terre est supérieur au diamètre de la lune et que le diamètre du soleil est supérieur au diamètre de la terre, me rencontrant dans cette hypothèse avec la plupart des astronomes antérieurs.

3. Troisième hypothèse : le diamètre du soleil est trente fois plus grand que celui de la lune, et pas plus,

1. Cf. Aristarque, *Des grandeurs et des distances*, etc., 2 ; Ptolémée, *Almageste* I, 6.

2. Parmi lesquels peut-être Dicéarque.

3. Des différentes évaluations du périmètre de la terre la plus célèbre est celle d'Ératosthène, fondée sur des mesures géodésiques opérées par lui en Égypte.

σφαῖραν· τὰς γὰρ ἀποδείξιας τῶν φαινομένων οὕτως ὑποκειμένῳ ἐναρμόζει, καὶ μάλιστα φαίνεται τὸ μέγεθος τᾶς σφαίρας, ἐν ᾇ ποιεῖται τὰν γᾶν κινουμέναν, ἴσον ὑποτίθεσθαι τῷ ὑφ᾽ ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. Φαμὲς δή, καὶ εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, καὶ οὕτως τινὰς δειχθήσειν τῶν ἐν ἀρχᾷ ἀριθμῶν τῶν κατονομαξίαν ἐχόντων ὑπερβάλλοντας τῷ πλήθει τὸν ἀριθμὸν τὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ εἰρημένᾳ σφαίρᾳ, ὑποκειμένων τῶνδε· πρῶτον μὲν τὰν περίμετρον τᾶς γᾶς εἶμεν ὡς τ̄ μυριάδων σταδίων καὶ μὴ μείζω, καίπερ τινῶν πεπειραμένων ἀποδεικνύειν, καθὼς καὶ τὺ παρακολουθεῖς, ἐοῦσαν αὐτὰν ὡς λ̄ μυριάδων σταδίων. Ἐγὼ δ᾽ ὑπερβαλλόμενος καὶ θεὶς τὸ μέγεθος τᾶς γᾶς ὡς δεκαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν προτέρων δεδοξασμένου τὰν περίμετρον αὐτᾶς ὑποτίθεμαι εἶμεν ὡς τ̄ μυριάδων σταδίων καὶ μὴ μείζω· μετὰ δὲ τοῦτο τὰν διάμετρον τᾶς γᾶς μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς πλείστοις τῶν προτέρων ἀστρολόγων· μετὰ δὲ ταῦτα τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν καὶ μὴ μείζονα, καίπερ τῶν

1 γὰρ add. Torellius || 2 ὑποκειμένῳ Gertz : ὑποκειμένου DEH ὑποκειμένων G || 4 ὑποτίθεσθαι Riualtus : ὑποτίθεται codd. || 7 δειχθήσειν Ahrens : δειχθεισ codd. || 8 ἀρχᾷ ἀριθμῶν Heiberg et Hultsch : ἀρχαῖς codd. || κατονομαξίαν Wallis et Heiberg : κατονομαξιῶν codd. || 9 μέγεθος G : μεγέθους DEH || 11 μυριάδων GH : μοιριάδων DE || 12 μὴ add. Wallis || μείζω Wallis : μείζων codd. || καίπερ Wallis : καὶ περὶ codd. || τινῶν Heiberg : τῶν codd. || 13 τὺ Riualtus : τοι codd. || 14 μυριάδων GH : μοιριάδων DE || καὶ θεὶς Heiberg : καθεὶς codd. || 15 δεκαπλάσιον Wallis : δεκαπλασίων codd. || 16 δεδοξασμένου Basil. : δεδοξασμένων codd. || 17 μυριάδων Heiberg : $\overset{\upsilon}{\mu}$ codd. || μείζω E : μείζων DGH || 18 εἶμεν G : εκειμεν codd. || 23 καίπερ Wallis : καὶ περὶ codd.

bien que parmi les astronomes antérieurs Eudoxe[1] ait essayé de le présenter comme neuf fois plus grand, et mon père Phidias comme douze fois plus grand, alors qu'Aristarque[2] s'est efforcé de démontrer que le diamètre du soleil est compris entre une longueur de dix-huit diamètres de la lune et une longueur de vingt diamètres de la lune ; mais moi, dépassant aussi ce nombre, je suppose, pour que ma proposition soit démontrée sans contestation, que le diamètre du soleil est égal à trente diamètres de la lune, et pas plus.

4. Nous admettons, enfin, que le diamètre du soleil est supérieur au côté du polygone (sc. régulier) de mille côtés inscrit dans le grand cercle (sc. de la sphère) du monde. Je fais cette hypothèse, alors qu'Aristarque avait trouvé que le (sc. diamètre du) soleil apparaît comme la sept cent vingtième partie du cercle du zodiaque. En examinant la question, j'ai de mon côté essayé, de la manière qui va suivre, de prendre, à l'aide d'instruments, l'angle qui embrasse le soleil, en ayant son sommet dans l'œil. Certes, la mesure exacte (sc. de cet angle) n'est pas chose aisée, parce que ni la vue, ni les mains, ni les instruments nécessaires pour prendre cet angle ne sont assez sûrs pour nous le faire trouver avec précision ; mais il ne me paraît pas indiqué pour le moment de m'arrêter longtemps à cette question, surtout parce que des observations de ce genre ont été souvent signalées ; il me suffit pour la démonstration de ma proposition de prendre un angle qui ne soit pas supérieur à l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet dans l'œil, et de prendre ensuite un autre

1. Eudoxe de Cnide, géomètre et astronome, disciple de Platon ; il chercha à « sauver les apparences » des mouvements des planètes par sa théorie des sphères homocentriques.

2. Dans son livre — le seul qui ait été conservé — *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune.*

προτέρων ἀστρολόγων Εὐδόξου μὲν ὡς ἐννεαπλασίονα ἀποφαινομένου, Φειδία δὲ τοῦ ἁμοῦ πατρὸς ὡς δὴ δωδεκαπλασίαν, Ἀριστάρχου δὲ πεπειραμένου δεικνύειν ὅτι ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας μείζων μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλασίων, ἐλάττων δὲ ἢ εἰκοσαπλασίων· ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ τοῦτον, ὅπως τὸ προκείμενον ἀναμφιλόγως ᾖ δεδειγμένον, ὑποτίθεμαι τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν καὶ μὴ μείζονα· ποτὶ δὲ τούτοις τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. Τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι Ἀριστάρχου μὲν εὑρηκότος τοῦ κύκλου τῶν ζῳδίων τὸν ἅλιον φαινόμενον ὡς τὸ εἰκοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν, αὐτὸς δὲ ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον ἐπειράθην ὀργανικῶς λαβεῖν τὰν γωνίαν, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. Τὸ μὲν οὖν ἀκριβὲς λαβεῖν οὐκ εὐχερές ἐστι διὰ τὸ μήτε τὰν ὄψιν μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι' ὧν δεῖ λαβεῖν, ἀξιόπιστα εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι· περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος οὐκ εὔκαιρον μακύνειν ἄλλως τε καὶ πλεονάκις τοιούτων ἐμπεφανισμένων· ἀποχρὴ δέ μοι ἐς τὰν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἅτις ἐστὶ μὴ μείζων τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, καὶ πάλιν

1 ἐννεαπλασίονα Wallis : ἐννεαπλάσιον codd. || 2 ἁμοῦ Blass, Kieler, Heiberg : ακου DEGH || 4 τοῦ add. Heiberg || 7 προκείμενον Gertz : ὑποκείμενον codd. || ἀναμφιλόγως Heiberg : ἀναμφίλογον codd. || 8 τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου add. Wallis || 9 μείζονα G : μεῖζον D μείζων H μείζω E || 13 εὑρηκότος Heiberg : εἰρηκότος codd. || τὸν G : τῶν DEH || 16 εἰς ἃν Wallis : ὡς ἂν codd. || ἔχουσαν EGH : ἔχουσα D || 17 οὖν ἀκριβὲς Heiberg : ὅμοιον ἀκριβεῖ codd. || 19 δεῖ λαβεῖν Heiberg : διαλαβεῖν codd. || ἀξιόπιστα Hultsch et Heiberg : ἀξιοπίστας codd. || 23 μὴ add. Wallis || εἰς Heiberg : ἐς G αἷς DEH || 24 ἐναρμόζει G : ἐναρμόζῃ DEH || τᾷ add. Wallis.

angle qui ne soit pas inférieur à l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet dans l'œil. Une longue règle ayant donc été placée sur un socle vertical disposé en un lieu d'où le soleil à son lever[1] pouvait être vu, un petit cylindre, fait au tour, est posé verticalement sur la règle immédiatement après le lever du soleil ; ensuite, le soleil étant à l'horizon et pouvant (sc. encore) être regardé en face, la règle est orientée vers le soleil et l'œil placé à l'extrémité de la règle ; le cylindre, posé entre le soleil et l'œil, fait écran au soleil. Le cylindre est donc éloigné (sc. peu à peu) de l'œil, et dès qu'une petite partie du soleil commence à se montrer de chaque côté du cylindre, celui-ci est fixé. Si donc l'œil voyait réellement à partir d'un seul point, des tangentes étant menées au cylindre à partir de l'extrémité de la règle, où est posé l'œil, l'angle compris entre les droites menées serait inférieur à l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet dans l'œil, puisque quelque chose du soleil est visible de chaque côté du cylindre ; mais comme les yeux ne voient pas à partir d'un point unique, mais à partir d'une certaine grandeur, on prend une certaine grandeur, de forme ronde, non inférieure à l'œil, et on la place à l'extrémité de la règle, à l'endroit où avait été placé l'œil ; si on mène alors des droites tangentes à la fois à cette grandeur et au cylindre, l'angle compris entre ces droites est inférieur

1. Précaution prise par les atronomes de l'antiquité pour ménager les yeux.

ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν, ἅτις ἐστὶν οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας, εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. Τεθέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπὶ πόδα ὀρθὸν ἐν τόπῳ κείμενον, ὅθεν ἤμελλεν ἀνατέλλων ὁ ἅλιος ὁρᾶσθαι, καὶ κυλίνδρου μικροῦ τορνευθέντος καὶ τεθέντος ἐπὶ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθέως μετὰ τὰν ἀνατολὰν τοῦ ἁλίου, ἔπειτ' ἐόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ ὁρίζοντι καὶ δυναμένου ἀντιβλέπεσθαι ἐπεστράφη ὁ κανὼν εἰς τὸν ἅλιον, καὶ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος · ὁ δὲ κύλινδρος ἐν μέσῳ κείμενος τοῦ τε ἁλίου καὶ τᾶς ὄψιος ἐπεσκότει τῷ ἁλίῳ. Ἀποχωριζόμενος οὖν [τοῦ κυλίνδρου] ἀπὸ τᾶς ὄψιος, ἐν ᾧ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ ἁλίου μικρὸν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου, κατεστάθη ὁ κύλινδρος. Εἰ μὲν οὖν συνέβαινεν τὰν ὄψιν ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέπειν, εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη, ἐπιψαυουσᾶν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐλάσσων κα ἦς τᾶς γωνίας, εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, διὰ τὸ παραβλέπεσθαί τι τοῦ ἁλίου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου · ἐπεὶ δ' αἱ ὄψιες οὐκ ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθεος, ἐλάφθη τι μέγεθος στρογγύλον οὐκ ἔλαττον ὄψιος, καὶ τεθέντος τοῦ μεγέθεος ἐπὶ τὸ

2 εἰς Heiberg : ἐς G ας DEH ‖ ἐναρμόζει G : ἐναρμόζῃ DEH ‖ τᾷ H : τηα DE τῇ G ‖ 3 πόδα Gertz : πεδὸν codd. ‖ 4 ἀνατέλλων D : ἀνατέλλειν EGH ‖ 7 ἐόντος Wallis : ἰόντος codd. ‖ δυναμένου Wallis : δυνάμενον τοῦ DEH δυναμένου αὐτοῦ G ‖ 8-9 ἁ ὄψις Riualtus : ἀψὶς codd. ‖ 11 ἀποχωριζόμενος οὖν Heiberg : ἀποχωριζόμενος DEH ἀποχωριζομένου G ‖ τοῦ κυλίνδρου codd. : del. Heiberg ‖ 12 ᾧ Heiberg : ᾇ codd. ‖ μικρὸν Wallis : μικροῦ codd. ‖ 14 οὖν Heiberg : ὁμοίως codd. ‖ 16 ἐπιψαυουσᾶν Riualtus : ἐπιψαύουσαν codd. ‖ 17 ἦς Heiberg : εἰς codd. ‖ εἰς Heiberg : ἐς G αἷς DEH ‖ 18 ἐναρμόζει GH : ἐναρμόζῃ DE ‖ τὰν GH : τᾷ D τᾶς E ‖ ἔχουσαν Basil. : ἐχούσας codd. ‖ 19 παραβλέπεσθαί Gertz : περιβλέπεσθαί codd. ‖ 20 ἀφ' ἑνὸς σαμείου Wallis : ἀφανῆ σημεῖον codd. ‖ 22 ὄψιος Wallis : ὄψις DEH ἢ ὄψις G.

à l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil. Et voici la manière dont on trouve la grandeur (sc. ronde) non inférieure à l'œil : on prend deux petits cylindres minces, de même épaisseur, l'un blanc, l'autre non, et on les place devant l'œil, le blanc à quelque distance, celui qui n'est pas blanc le plus près possible de l'œil, au point même de toucher la face. Dès lors, si les petits cylindres pris sont moins larges que l'œil, le cylindre voisin de l'œil est embrassé par le flux visuel, et l'œil voit le cylindre blanc ; si les cylindres sont beaucoup moins larges, le blanc est vu entièrement ; s'ils ne sont pas beaucoup moins larges, on voit des parties du blanc de part et d'autre du cylindre voisin de l'œil ; mais si on choisit ces cylindres avec une épaisseur convenable, l'un d'eux fait écran à l'autre sans cacher un espace plus grand ; il est donc certain qu'une grandeur telle que l'épaisseur des cylindres qui produisent cet effet n'est pas inférieure aux dimensions de l'œil. Quant à l'angle non inférieur à l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil, il a été pris de cette manière : le cylindre étant posé sur la règle à une distance de l'œil telle qu'il fait écran à tout le soleil, si on mène de l'extrémité de la règle, où l'œil est placé, des droites tangentes

ἄκρον τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη, ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν ἐπιψαυουσᾶν τοῦ τε μεγέθεος καὶ τοῦ κυλίνδρου ἁ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐλάττων ἦς τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾳ ὄψει. Τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος τόνδε τὸν τρόπον εὑρίσκεται· δύο κυλίνδρια λαμβάνεται λεπτὰ ἰσοπαχέα ἀλλάλοις, τὸ μὲν λευκόν, τὸ δὲ οὔ, καὶ προτίθενται πρὸ τᾶς ὄψιος, τὸ μὲν λευκὸν ἀφεστακὸς ἀπ' αὐτᾶς, τὸ δὲ οὐ λευκὸν ὡς ἔστιν ἐγγυτάτω τᾶς ὄψιος, ὥστε καὶ θιγγάνειν τοῦ προσώπου. Εἰ μὲν οὖν κα τὰ λαφθέντα κυλίνδρια λεπτότερα ἔωντι τᾶς ὄψιος, περιλαμβάνεται ὑπὸ τᾶς ὄψιος τὸ ἐγγὺς κυλίνδριον καὶ ὁρῆται ὑπὸ αὐτᾶς τὸ λευκόν, εἰ μέν κα παρὰ πολὺ λεπτότερα ἔωντι, πᾶν, εἰ δέ κα μὴ παρὰ πολύ, μέρεά τινα τοῦ λευκοῦ ὁρῶνται ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐγγὺς τᾶς ὄψιος, λαφθέντων δὲ τῶνδε τῶν κυλινδρίων ἐπιταδείων πως τῷ πάχει ἐπισκοτεῖ τὸ ἕτερον αὐτῶν τῷ ἑτέρῳ καὶ οὐ πλείονι τόπῳ· τὸ δὴ ταλικοῦτον μέγεθος, ἁλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλινδρίων τῶν τοῦτο ποιούντων, μάλιστά πώς ἐστιν οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος. Ἁ δὲ γωνία ἁ οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾳ ὄψει, οὕτως ἐλάφθη· ἀποσταθέντος ἐπὶ τοῦ κανονίου τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος οὕτως, ὡς ἐπισκοτεῖν τὸν

1-2 ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν ἐπιψαυουσᾶν Wallis : ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἐπιψαυόυσα codd. || 4 εἰς Heiberg : ἐς G αἷς DEH || ἐναρμόζει G : ἐναρμόζῃ DEH || ἔχουσαν Nizzius : ἐχούσας codd. || 7 τὸ pr. GH : τὰ DE || 8 πρὸ Heiberg : πρὸ πρὸς G ποτὶ EG πρὸς D || ὄψιος Wallis : ὀψίας codd. || 9 ὡς G : ὃς DH ὅσον E || ὄψιος Wallis : ὀψίας codd. || 10 κα add. Heiberg || 11 λεπτότερα Wallis : λεπτότατα codd. || ὄψιος Wallis : ὀψίας codd. || 13 μέν Wallis : κο codd. || λεπτότερα Wallis : λεπτοτέραν codd. || 14 ἔωντι Wallis : ἔοντι codd. || 15 τοῦ G : τᾶς DEH || 16 κυλινδρίων Wallis : κυλίνδρων codd. || ἐπιταδείων Wallis : ἔπειτα δι' ὧν codd. || 18 κυλινδρίων Wallis : κυλίνδρων codd. || 20 ἁ alt. add. Heiberg || εἰς Heiberg : ἐς G αἷς DEH || 22 ἐπὶ Wallis : ἀπὸ codd. || 23 ἐπισκοτεῖν Basil. : ἐπικροτεῖν codd.

au cylindre, l'angle compris entre les droites menées n'est pas inférieur à l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil. Un angle droit étant ainsi mesuré par les angles pris de cette manière, l'angle (sc. dont le sommet est) placé au point (sc. extrémité de la règle) est trouvé inférieur à la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, alors que le plus petit angle[1] est trouvé supérieur à la deux centième partie de l'angle droit ; il est donc évident que l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil est lui aussi inférieur à la cent soixante-quatrième partie, et supérieur à la deux centième partie d'un angle droit. Ces mesures confirmées, on démontre que le diamètre du soleil est supérieur au côté du polygone (sc. régulier) de mille côtés inscrit dans le grand cercle (sc. de la sphère) du monde. Imaginons en effet un plan passant par le centre du soleil, par le centre de la terre et par l'œil, au moment où le soleil se trouve un peu au-dessus de l'horizon ; que ce plan coupe le monde suivant le cercle ΑΒΓ, la terre suivant le cercle ΔΕΖ, et le soleil suivant le cercle ΣΗ ; soit Θ le centre de la terre, Κ le centre du soleil, et soit Δ l'œil ; menons de Δ les tangentes ΔΛ, ΔΞ au cercle ΣΗ, points de contact Ν et Τ, et de Θ les tangentes ΘΜ et ΘΟ, points de contact Χ et Ρ ; soit Α et Β les points d'intersection du cercle ΑΒΓ et des droites ΘΜ et ΘΟ ;

1. C'est-à-dire l'angle compris entre les tangentes aux deux cylindres menées à partir de l'œil.

κύλινδρον ὅλῳ τῷ ἁλίῳ, καὶ ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη, ἐπιψαυουσᾶν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν οὐκ ἐλάττων γίνεται τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. Ταῖς δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθᾶς γωνίας ἐγένετο ἁ ἐν στίγῳ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρ̅ξ̅δ̅ ἐλάττων ἢ ἓν μέρος τούτων, ἁ δὲ ἐλάττων διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ̅ μείζων ἢ ἓν μέρος τούτων· δῆλον οὖν ὅτι καὶ ἁ γωνία, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, ἐλάττων μέν ἐστιν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρ̅ξ̅δ̅ τούτων ἓν μέρος, μείζων δὲ ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ̅ τούτων ἓν μέρος. Πεπιστευμένων δὲ τούτων δείκνυται ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. Νοείσθω γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς καὶ διὰ τᾶς ὄψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἐόντος τοῦ ἁλίου, τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβληθὲν ἐπίπεδον τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν ΑΒΓ κύκλον, τὰν δὲ γᾶν κατὰ τὸν ΔΕΖ, τὸν δὲ ἅλιον κατὰ τὸν ΣΗ κύκλον, κέντρον δὲ ἔστω τᾶς μὲν γᾶς τὸ Θ, τοῦ δὲ ἁλίου τὸ Κ, ὄψις δὲ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἄχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ ΣΗ κύκλου ἀπὸ μὲν τοῦ Δ αἱ ΔΛ, ΔΞ, ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ Ν καὶ τὸ Τ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ αἱ ΘΜ, ΘΟ, ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ Χ καὶ τὸ Ρ, τὸν δὲ ΑΒΓ κύκλον τεμνόντων αἱ ΘΜ, ΘΟ κατὰ τὸ

4 εἰς Heiberg : ἐς G αἷς DEH ‖ 5 ἐναρμόζει G : ἐναρμόζῃ DEH ‖ 8 post τούτων rep. 4 lin. codd. : corr. Basil. ‖ 8-9 διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς Basil. : διαιρεθεῖσα τῶν ὀρθῶν codd. ‖ 10 εἰς ἃν Heiberg : ἐς ἂν G ἃ ἴσαν DEH ‖ ἐναρμόζει G : ἐναρμόζῃ DEH ‖ 14 δείκνυται Wallis : δι' ὧν καὶ codd. ‖ 15 χιλιαγώνου G : χιλιαγωνίου DEH ‖ 16 τῶν Wallis : τᾶς codd. ‖ 17 τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου add. Heiberg ‖ 19 ἐκβληθὲν Wallis : ἐκβεβληθὲν codd. ‖ 24 Δ ms. G : om. DEH ‖ 26 ΘΜ Basil. : ΘΗ codd.

Fig. 58

dès lors, ΘK est supérieur à ΔK du moment que par hypothèse le soleil se trouve au-dessus de l'horizon[1] ; il s'ensuit que l'angle compris entre ΔΛ et ΔΞ est supérieur à l'angle compris entre ΘM et ΘO. Or l'angle compris entre ΔΛ et ΔΞ est supérieur à la deux centième partie et inférieur à la cent soixante-quatrième partie d'un angle droit, puisqu'il est égal à l'angle embrassant le soleil et ayant son sommet dans l'œil ; par conséquent, l'angle compris entre ΘM et ΘO est inférieur à la cent soixante-quatrième partie d'un angle droit, et le segment de droite AB est inférieur à la corde du secteur circulaire qui est la six cent cinquante-sixième partie[2] du cercle ABΓ. Mais le périmètre du polygone indiqué (sc. de mille côtés) a au rayon du cercle ABΓ un rapport inférieur au rapport de quarante-quatre à sept, parce que le rapport du périmètre de tout polygone inscrit

1. L'angle ΘΔK, qui serait droit si le soleil était à l'horizon, est ainsi obtus.

2. L'angle MΘO étant la 164[e] partie d'un angle droit, il est égal à un angle au centre correspondant à l'arc qui est la 656[e] partie (656 = 4.164) de la circonférence du cercle ABΓ.

Fig. 58

Α καὶ τὸ Β· ἔστι δὴ μείζων ἁ ΘΚ τᾶς ΔΚ, ἐπεὶ ὑπόκειται ὁ ἅλιος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶμεν· ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ μείζων ἐστὶ τᾶς γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ. Ἁ δὲ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ μείζων μέν ἐστιν ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς, ἐλάττων δὲ ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ τούτων ἓν μέρος· ἴσα γάρ ἐστιν τᾷ γωνίᾳ, εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει· ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ τούτων ἓν μέρος, ἁ δὲ ΑΒ εὐθεῖα ἐλάττων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διαιρεθείσας τᾶς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφερείας ἐς χνϛ. Ἁ δὲ τοῦ εἰρημένου πολυγωνίου περίμετρος ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ διὰ τὸ παντὸς πολυγωνίου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ

1 ΘΚ Basil. : ΟΚ codd. ‖ 4 ΘΜ Basil. : ΘΝ codd. ‖ 7 ἴσα γάρ Wallis : ἴσον γωνίαι codd. ‖ εἰς Heiberg : ἐς G αἷς DEH ‖ 12 ΑΒΓ Basil. : ΑΒΝ codd.

dans un cercle au rayon de ce cercle est inférieur au rapport de quarante-quatre à sept ; tu sais, en effet, que j'ai démontré que dans tout cercle le périmètre est supérieur, d'une quantité plus petite que le septième, au triple du diamètre[1] et que le périmètre du polygone inscrit est inférieur à cette circonférence[2] ; le rapport de BA à ΘK est donc inférieur au rapport de onze à mille cent quarante-huit ; il s'ensuit[3] que BA est inférieur au centième de ΘK. Or le diamètre du cercle ΣH est égal à BA, puisque la moitié de ΣH, le segment ΦA, est égale à KP ; les segments ΘK et ΘA sont en effet égaux, et de leurs extrémités des perpendiculaires sont menées sous le même angle ; il est ainsi évident que le diamètre du cercle ΣH est inférieur à la centième partie de ΘK. De plus, le diamètre EΘΥ est inférieur au diamètre du cercle ΣH, puisque le cercle ΔEZ est inférieur[4] au cercle ΣH ; il s'ensuit que la somme de ΘΥ et de KΣ est inférieure à la centième partie de ΘK, de façon que le rapport de ΘK à ΥΣ est inférieur au rapport de cent à quatre-vingt-dix-neuf. Et du moment que ΘK n'est pas inférieur[5] à ΘP, et que ΣΥ est inférieur à ΔT, le rapport de ΘP à ΔT est inférieur au rapport de cent à quatre-vingt-dix-neuf. Mais puisque dans les triangles rectangles ΘKP et ΔKT les côtés KP et KT sont égaux et les côtés ΘP et ΔT inégaux, ΘP étant plus grand[6] (sc. que ΔT), le rapport de l'angle compris entre les côtés ΔT et ΔK à l'angle compris entre ΘP et ΘK est supérieur au rapport de ΘK à ΔK, mais inférieur au rapport

1. Cf. *La mesure du cercle*, 3.
2. Cf. *De la sphère et du cylindre*, I.
3. Cf. notes compl.
4. Cf. plus haut l'hypothèse 2.
5. Cf. Eucl. III, 8.
6. Parce que ΘK > ΔK.

τὰν περίμετρον ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάττονα λόγον ἔχειν ἢ τὰ μ̅δ̅ ποτὶ τὰ ζ̅· ἐπίστασαι γὰρ δεδειγμένον ὑφ᾽ ἁμῶν ὅτι παντὸς κύκλου ἁ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει, ταύτας δὲ ἐλάττων ἐστὶν ἁ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγωνίου· ἐλάττω οὖν λόγον ἔχει ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΘΚ ἢ τὰ ι̅α̅ ποτὶ τὰ ,α̅ρ̅μ̅η̅· ὥστε ἐλάττων ἐστὶν ἁ ΒΑ τᾶς ΘΚ ἢ ἑκατοστὸν μέρος. Τᾷ δὲ ΒΑ ἴσα ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ ΣΗ κύκλου, διότι καὶ ἁ ἡμίσεια αὐτᾶς ἁ ΦΑ ἴσα ἐστὶ τᾷ ΚΡ· ἰσᾶν γὰρ ἐουσᾶν τᾶν ΘΚ, ΘΑ ἀπὸ τῶν περάτων κάθετοι ἐπιζεύγνυνται ὑπὸ τὰν αὐτὰν γωνίαν· δῆλον οὖν ὅτι ἁ διάμετρος τοῦ ΣΗ κύκλου ἐλάττων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος τᾶς ΘΚ. Καὶ ἁ ΕΘΥ διάμετρος ἐλάττων ἐστὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ ΣΗ κύκλου, ἐπεὶ ἐλάττων ἐστὶν ὁ ΔΕΖ κύκλος τοῦ ΣΗ κύκλου· ἐλάττονες ἄρα ἐντὶ ἀμφότεραι αἱ ΘΥ, ΚΣ ἢ ἑκατοστὸν μέρος τᾶς ΘΚ· ὥστε ἁ ΘΚ ποτὶ τὰν ΥΣ ἐλάττονά λόγον ἔχει ἢ τὰ ρ̅ ποτὶ τὰ ϙ̅θ̅. Καὶ ἐπεὶ ἁ μὲν ΘΚ οὐκ ἐλάττων ἐστὶ τᾶς ΘΡ, ἁ δὲ ΣΥ ἐλάττων τᾶς ΔΤ, ἐλάττω ἄρα κα λόγον ἔχοι ἁ ΘΡ ποτὶ τὰν ΔΤ ἢ τὰ ρ̅ ποτὶ τὰ ϙ̅θ̅. Ἐπεὶ δὲ τῶν ΘΚΡ, ΔΚΤ ὀρθογωνίων ἐόντων αἱ μὲν ΚΡ, ΚΤ πλευραὶ ἴσαι ἐντὶ, αἱ δὲ ΘΡ, ΔΤ ἀνίσοι καὶ μείζων ἁ ΘΡ, ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΤ, ΔΚ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τᾶν ΘΡ, ΘΚ μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ ΘΚ ποτὶ τὰν ΔΚ,

2 ἔχειν G : ἔχει DEH ‖ 5 ταύτας Heiberg : τὰς codd. ‖ 5-6 ἐλάττων ἐστὶν ἁ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγωνίου add. Heiberg ‖ 6 οὖν rest. Riualtus ‖ ἁ G : ἢ ἁ DEH ‖ 9 ΣΗ Basil. : ΕΗ codd. ‖ 10 ΘΑ Heiberg : τᾷ ΘΑ codd. ‖ 11 ἐπιζεύγνυνται Heiberg : ἐπιζευγνύμεναι codd. ‖ ὑπὸ Heiberg : ἐπὶ codd. ‖ 12 ΣΗ ms. G : ΑΒΓ mss. DEH ‖ 13 διάμετρος G : γωνία DEH ‖ 14 ΣΗ ms. G : ΑΒΗ mss. DEH ‖ 15 ΣΗ ms. G : ΕΗ mss. DEH ‖ 16 τᾶς Heiberg : τοῦ codd. ‖ 18 ΘΚ οὐκ F et Wallis : ΘΚΥ mss. DEGH ‖ 19 κα Heiberg : καὶ codd. ‖ ἔχοι DG : ἔχει EH ‖ 20 τὰν GH : τᾷ DE ‖ ἐπεὶ Wallis : ἐπὶ codd. ‖ δὲ add. Heiberg ‖ 22 ΘΡ, ἁ Wallis : ΟΡΑ codd. ‖ ἁ tert. add. Heiberg.

de ΘP à ΔT ; car si dans deux triangles rectangles deux des côtés comprenant l'angle droit sont égaux et les deux autres inégaux, le plus grand des angles apposés aux côtés inégaux a au plus petit de ces angles un rapport supérieur au rapport de la plus grande hypoténuse à la plus petite, mais inférieur au rapport du plus grand des côtés de l'angle droit au plus petit[1]. Par conséquent, le rapport de l'angle compris entre ΔΛ et ΔΞ à l'angle compris entre ΘO et ΘM est inférieur au rapport de ΘP à ΔT, qui est lui-même inférieur au rapport de cent à quatre-vingt-dix-neuf ; il s'ensuit que le rapport de l'angle compris entre ΔΛ et ΔΞ à l'angle compris entre ΘM et ΘO est lui aussi inférieur au rapport de cent à quatre-vingt-dix-neuf. Et comme l'angle compris entre ΔΛ et ΔΞ est supérieur à la deux centième partie d'un angle droit, l'angle compris entre ΘM et ΘO est supérieur à quatre-vingt-dix-neuf vingt-millièmes d'un angle droit ; par conséquent, cet angle (sc. OΘM) est supérieur à un deux cent troisième d'un angle droit[2]. Le segment BA est donc supérieur à la corde du secteur qui est la huit cent douzième partie du cercle ABΓ. Or c'est au segment de droite AB qu'est égal le diamètre du cercle[3] ; il est donc évident que le diamètre du cercle est supérieur au côté du polygone de mille côtés.

II. Ces (sc. relations métriques) admises, on peut démontrer aussi que le diamètre du monde est inférieur à une droite égale à dix mille diamètres de la terre et que, de plus, le diamètre du monde est inférieur à une droite égale à cent myriades de myriades de stades[4]. Du moment, en effet, qu'on a admis que le diamètre du soleil n'est pas supérieur à trente diamètres

1. Cf. *Eucl.* VI, 33 ; Ptolémée, *Almageste* **I, 10.**
2. Parce que $\frac{20\,000}{203} = 98\,\frac{106}{203} < 99$.
3. C'est-à-dire le diamètre du cercle ΣH.
4. C'est-à-dire dix milliards de stades.

ἐλάττω δὲ ἢ ἁ ΘΡ ποτὶ τὰν ΔΤ· εἰ γάρ κα δυῶν τριγώνων ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἅτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἴσαι ἔωντι, αἱ δὲ ἅτεραι ἄνισοι, ἁ μείζων γωνία τᾶν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάττονα μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτεινουσᾶν ποτὶ τὰν ἐλάττονα, ἐλάττονα δὲ ἢ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ τὰν ἐλάττονα. Ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τᾶν ΘΟ, ΘΜ ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ ἁ ΘΡ ποτὶ τὰν ΔΤ, ἅτις ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ τὰ ρ̄ ποτὶ τὰ ϙ̄θ̄· ὥστε καὶ ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ τὰ ρ̄ ποτὶ τὰ ϙ̄θ̄. Καὶ ἐπεί ἐστιν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς, εἴη κα ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ μείζων ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας ἐς δισμύρια τούτων ϙ̄θ̄ μέρεα· ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ̄ καὶ γ̄ τούτων ἓν μέρος. Ἁ ἄρα ΒΑ μείζων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διῃρημένας τᾶς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφερείας εἰς ω̄ῑβ̄. Τᾷ δὲ ΑΒ ἴσα ἐντὶ ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος· δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς.

II. Τούτων δὲ ὑποκειμένων δείκνυται καὶ τάδε· οἷον ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων, καὶ ἔτι ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριαδες ρ̄. Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μὴ μείζω εἶμεν ἢ

5 τᾶν G : τᾷ DEH ‖ 6 ὑποτεινουσᾶν Wallis : ὑποτείνουσα codd. ‖ ποτὶ G : om. DEH ‖ 9 ΘΟ Wallis : ΘΝ codd. ‖ 15 εἴη κα G : ἢ εἴκα DEH ‖ 17 μέρεα Wallis : μέρος codd. ‖ 20 εἰς Heiberg : ἐς G αἶς DEH ‖ 21 τᾷ EG : τᾶν DH ‖ 28 μείζω Wallis : μείζων DEH μείζονα G.

de la lune[1], et que le diamètre de la terre est supérieur au diamètre de la lune[2], il est évident que le diamètre du soleil est inférieur à trente diamètres de la terre. Comme on a démontré, de plus, que le diamètre du soleil est supérieur au côté du polygone (sc. régulier) de mille côtés inscrit dans le grand cercle (sc. de la sphère) du monde, il est clair que le périmètre du polygone indiqué de mille côtés est inférieur à mille diamètres du soleil. Or le diamètre du soleil est inférieur à trente diamètres de la terre ; il s'ensuit que le périmètre du polygone de mille côtés est inférieur à trente mille diamètres de la terre. Du moment donc que le périmètre du polygone de mille côtés est inférieur à trente mille diamètres de la terre et supérieur à trois diamètres (sc. de la sphère) du monde — on a démontré en effet que dans tout cercle le diamètre est inférieur au tiers du périmètre de tout polygone régulier, inscrit dans le cercle, dont le nombre des côtés est supérieur à celui de l'hexagone[3] —, le diamètre (sc. de la sphère) du monde est inférieur à dix mille diamètres de la terre. On a ainsi démontré que le diamètre du monde est inférieur à dix mille diamètres de la terre ; que le diamètre du monde est inférieur à cent myriades de myriades de stades, cela ressort avec évidence de ce qui suit ; puisque, en effet, on a supposé que le périmètre de la terre n'est pas supérieur à trois cent myriades de stades[4], et que le diamètre de la terre est supérieur

1. Cf. hypoth. 3.
2. Cf. hypoth. 2.
3. Le périmètre de l'hexagone est en effet exactement égal au triple du diamètre, cf. Eucl. IV, 15, coroll., et le périmètre croît avec le nombre des côtés des polygones.
4. Cf. hypoth. 4.

τριακονταπλασίονα τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, τὰν δὲ διάμετρον τᾶς γᾶς μείζω εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, δῆλον ὡς ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. Πάλιν δέ, ἐπεὶ ἐδείχθη ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερὸν ὅτι ἁ τοῦ χιλιαγώνου περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάττων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ ἁλίου. Ἁ δὲ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς· ὥστε ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρισμυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. Ἐπεὶ οὖν ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου τᾶς μὲν διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρισμυριοπλασίων, τᾶς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίων· δέδεικται γάρ τοι διότι παντὸς κύκλου ἁ διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου τᾶς περιμέτρου, ὅ κα ἰσόπλευρον ᾖ καὶ πολυγωνότερον τοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ· εἴη κα ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. Ἁ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς δέδεικται· ὅτι δὲ ἐλάττων ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ̄ ἐκ τούτου δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν περίμετρον τᾶς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν ἢ τριακοσίας μυριάδας σταδίων, ἁ δὲ περίμετρος τᾶς γᾶς μείζων ἐστὶν

1 τριακονταπλασίονα G : τριακονταπλασίων DEH ‖ 2 μείζω Wallis : μείζων DEH μείζονα G ‖ 17 τᾶς add. Heiberg ‖ 18 κα Wallis : καὶ codd. ‖ ἰσόπλευρον ᾖ Heiberg : εἰς ὃ ΕΘ πλευρὰν ἐὸν codd. ‖ πολυγωνότερον Heiberg : πολυγώνου ὅτι codd. ‖ 19 ἐγγεγραμμένον Wallis : ἐγγεγραμμένου codd. ‖ ἐν Heiberg : μὲν codd. ‖ τῷ κύκλῳ Wallis : τοῦ κύκλου codd. ‖ 22-23 τᾶς γᾶς — διάμετρος add. Heiberg ‖ 25 τὰν G : τὸν DEH ‖ 26 ἁ Wallis : ἐστὶν ἁ codd.

au triple du diamètre, parce que dans tout cercle la circonférence est supérieure au triple du diamètre[1], il est évident que le diamètre de la terre est inférieur à cent myriades de stades. Du moment donc que le diamètre (sc. de la sphère) du monde est inférieur à dix milles diamètres de la terre, il est évident que le diamètre du monde est inférieur à cent myriades de myriades de stades. Telles sont mes hypothèses au sujet des grandeurs et des distances. Voici maintenant ce que j'admets au sujet du sable : si on a une quantité de sable dont le volume ne dépasse pas celui d'une graine de pavot, le nombre de ses grains de sable ne dépassera pas dix mille, et le diamètre de la graine ne sera pas inférieur à un quarantième de doigt. Je fais ces hypothèses à la suite des observations que voici : des graines de pavot ayant été posées sur une règle polie suivant une ligne droite de manière qu'elles se touchaient l'une l'autre, vingt-cinq graines ont occupé un espace supérieur à la longueur d'un doigt. Supposant donc le diamètre de la graine plus petit je lui prête environ un quarantième de doigt, et pas moins, désirant là aussi mettre la démonstration de la proposition à l'abri de toute contestation.

III. Voilà donc mes hypothèses ; mais je crois utile de m'expliquer sur la dénomination des nombres, pour que ceux des lecteurs, qui n'ont pas eu entre les mains mon livre adressé à Zeuxippe, ne soient pas déroutés par l'absence, dans le présent livre, d'une indication préalable au sujet de cette dénomination. Il se trouve ainsi que la tradition nous ait transmis les noms des nombres jusqu'à dix mille, et nous distinguons suffisamment les nombres dépassant les dix

1. Cf. *La mes. du cercle*, 3.

ἢ τριπλασία τᾶς διαμέτρου διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὰν περιφέρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίονα τᾶς διαμέτρου, δῆλον ὡς ἁ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων ρ̄ μυριάδες. Ἐπεὶ οὖν ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον ὡς ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ̄. Περὶ μὲν οὖν τῶν μεγεθέων καὶ τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι, περὶ δὲ τοῦ ψάμμου τάδε· εἴ κα ᾖ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ τοῦ ψάμμου μὴ μεῖζον μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάττονα εἶμεν ἢ τετρωκοστομόριον δακτύλου. Ὑποτίθεμαι δὲ τοῦτο ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον· ἐτέθεν ἐπὶ κανόνα λεῖον μάκωνες ἐπ' εὐθείας ἐπὶ μίαν κείμεναι ἁπτόμεναι ἀλλαλᾶν, καὶ ἀνέλαβον αἱ κε̄ μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλιαίου μάκεος. Ἐλάττονα οὖν τιθεὶς τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος ὑποτίθεμαι ὡς τετρωκοστομόριον εἶμεν δακτύλου καὶ μὴ ἐλάττονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατα δείκνυσθαι τὸ προκείμενον.

III. Ἃ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα· χρήσιμον δὲ εἶμεν ὑπολαμβάνω τὰν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως καὶ τῶν ἄλλων οἱ τῷ βιβλίῳ μὴ περιτετευχότες τῷ ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν ὑπὲρ αὐτᾶς ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ προειρημένον. Συμβαίνει δὴ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἐς τὸ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἁμῖν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τὸ τῶν

1 ἢ G : om. DEH || 2 τριπλασίονα G : τριπλασίων DEH || 4 μυριάδες Heiberg : μυριάδων codd. || 7 μὲν οὖν τῶν add. Heiberg || 10 μεῖζον G : μείζων DEH || 12 τετρωκοστομόριον E : τετρωκοντομόριον DGH || 16 οὖν add. Heiberg || 19 ἀναμφιλογώτατα Heiberg : ἀναμφιλογώτατον codd. || 22 περιτετευχότες Nizzius : περιτεύατ'ἐς codd. || τῷ Wallis : τὸ codd. || 24 προειρημένον Riualtus : προειρημένων codd. || 25 τὸ Wallis : τὰ codd. || 26 τὸ add. Heiberg.

mille en énumérant le nombre des myriades jusqu'à la myriade de myriades. Nous appellerons donc premiers nombres ceux qui, d'après la nomenclature actuelle, vont jusqu'à la myriade de myriades ; nous appellerons unité de nombres seconds la myriade de myriades de premiers nombres, et nous compterons dans les nombres seconds des unités et, à partir des unités, des dizaines, des centaines, des milliers et des myriades jusqu'à la myriade de myriades. Nous appellerons de nouveau unité de nombres troisièmes la myriade de myriades de nombres seconds, et nous compterons dans les nombres troisièmes des unités et, à partir des unités, des dizaines, des centaines, des milliers et des myriades jusqu'à la myriade de myriades. De la même manière, nous appellerons unité de nombres quatrièmes la myriade de myriades de nombres troisièmes, unité de nombres cinquièmes la myriade de myriades de nombres quatrièmes, et en progressant ainsi les nombres auront leur dénomination jusqu'à la myriade de myriades des nombres cent millionièmes.

Les nombres distingués ainsi pourraient suffire certes, mais il est possible d'aller encore plus loin. Appelons en effet nombres de la première période les nombres énoncés jusqu'ici, et unité de premiers nombres de la seconde période le dernier nombre de la première période. Appelons encore unité de nombres seconds de la deuxième période la myriade de myriades

μυρίων [μὲν] ἀποχρεόντως γιγνώσκομες μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες ἔστε ποτὶ τὰς μυρίας μυριάδας. Ἔστων οὖν ἁμῖν οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἐς τὰς μυρίας μυριάδας πρῶτοι καλούμενοι, τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθων τῶν δευτέρων μονάδες καὶ ἐκ τᾶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυριάδας. Πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθων τῶν τρίτων ἀριθμῶν μονάδες καὶ ἀπὸ τᾶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυριάδας. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν τετάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα ἐχόντων ἐς τὰς μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας. Ἀποχρέοντι μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τοσοῦτον οἱ ἀριθμοὶ γιγνωσκόμενοι, ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλέον προάγειν. Ἔστων γὰρ οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτας περιόδου καλούμενοι, ὁ δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς πρώτας περιόδου μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τᾶς δευτέρας περιόδου

1 μὲν codd. : del. Heiberg || γιγνώσκομες Gertz : ἐγιγνώσκομεν codd. || 2 ἔστε Heiberg : ἐς τοῖς codd. || μυρίας add. Wallis || ἔστων Wallis : ἔστω codd. || 3 τὰς Wallis : τὰ DG τὰν EH || μυρίας μυριάδας Wallis : μυρίαν μυριάδων codd. || 5 ἀριθμῶν add. Wallis || ἀριθμείσθων Heiberg : ἀριθμῶν codd. || 6 ἐκ τᾶν Heiberg : ἑκατὸν DEH αἱ ἀπὸ τῶν G || 7 ἐς τὰς Wallis : ἔσται DEH ἔστε G || 7-8 μυρίας μυριάδας Wallis : μυρίων μυριάδων codd. || 9 ἀριθμείσθων Heiberg : ἀριθμείσθω codd. || 10 ἀπὸ Heiberg : αἱ ἀπὸ codd. || 11 ἐς τὰς Wallis : ἔσται DEH ἔστε G || 11-12 μυρίας μυριάδας Wallis : μυρίαν μυριάδες codd. || 16 ἐχόντων Wallis : ἔχοντες codd. || ἐς τὰς Wallis : ἔσται codd. || 17 μυρίας μυριάδας Wallis : μύριαι μυριάδες codd. || ἀποχρέοντι EG : ἀποχρέωντι DH || ἐπὶ τοσοῦτον Heiberg : ἀπὸ τοσούτων codd. || 20 πρώτας G : om. DEH.

de premiers nombres de la deuxième période. De la même manière, le dernier, aussi de ces nombres, s'appellera unité de nombres troisièmes de la deuxième période, et continuant ainsi à progresser les nombres de la deuxième période auront leur nom jusqu'à la myriade de myriades de nombres cent millionièmes. Le dernier nombre de la deuxième période s'appellera à son tour unité de premiers nombres de la troisième période, et ainsi de suite jusqu'à la myriade de myriades de nombres dix mille myriadièmes de la dix mille myriadième période.

Ces nombres ainsi dénommés, s'il y a des nombres en proportion rangés par ordre à partir de l'unité, et si le nombre le plus voisin de l'unité est la dizaine, les huit premiers de ces nombres, y compris l'unité, appartiendront aux nombres appelés premiers nombres, les huit suivants aux nombres appelés seconds, et les autres de la même manière aux nombres dénommés d'après la distance de leur octade de nombres à la première octade de nombres. Le huitième nombre de la première octade est donc mille myriades, et le premier nombre de la deuxième octade, puisqu'il est décuple du nombre qui le précède, sera une myriade de myriades, et ce nombre est l'unité des nombres seconds. Le huitième nombre de la seconde octade est mille myriades de nombres seconds. Le premier nombre de la troisième octade sera de nouveau, comme étant le décuple du nombre qui le précède, une myriade de myriades de nombres seconds, nombre qui est l'unité des nombres troisièmes. Il est évident qu'il en sera comme nous venons de l'indiquer pour une octade quelconque.

Il est utile de connaître aussi ce qui suit. Si des nombres sont en proportion à partir de l'unité et que

πρώτων ἀριθμῶν μονὰς καλείσθω τᾶς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. Ὁμοίως δὲ καὶ τούτων ὁ ἔσχατος μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες τὰ ὀνόματα ἐχόντων τᾶς δευτέρας περιόδου ἐς τὰς μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας. Πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς δευτέρας περιόδου μονὰς καλείσθω τρίτας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προαγόντων ἐς τὰς μυριακισμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας. Τούτων δὲ οὕτως κατωνομασμένων, εἴ κα ἔωντι ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἑξῆς κείμενοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν μονάδα δεκὰς ᾖ, ὀκτὼ μὲν αὐτῶν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται, οἱ δὲ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων καλουμένων, καὶ οἱ ἄλλοι τὸν αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων καλουμένων ἐσσοῦνται τᾷ ἀποστάσει τᾶς ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν. Τᾶς μὲν οὖν πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ὁ ὄγδοός ἐστιν ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες, τᾶς δὲ δευτέρας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶν τοῦ πρὸ αὐτοῦ, μύριαι μυριάδες ἐσσεῖται· οὗτος δέ ἐστι μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ὁ δὲ ὄγδοος τᾶς δευτέρας ὀκτάδος ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ τᾶς τρίτας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, μύριαι μυριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν· οὗτος δέ ἐστιν μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Φανερὸν δὲ ὅτι καὶ πολλοσταὶ ὀκτάδες ἑξοῦντι ὡς εἴρηται. Χρήσιμον δέ ἐστι καὶ τόδε γιγνωσκόμενον. Εἴ κα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς

1 πρώτων ἀριθμῶν μονὰς καλείσθω τᾶς δευτέρας περιόδου add. Wallis ‖ 5 ἐς τὰς Wallis : ἔσται DEGH ‖ 6 μυρίας μυριάδας Wallis : μύριαι μυριάδες codd. ‖ 8 ἐς τὰς Wallis : ἔσται codd. ‖ 10 μυρίας μυριάδας Wallis : μύριαι μυριάδες codd. ‖ 12 μὲν Heiberg : εἶεν codd. ‖ 14 καλουμένων Wallis : καλούμενοι codd. ‖ 16 τᾷ add. Heiberg ‖ 17 τᾶς G : ἁ DEH ‖ 26 ὅτι Basil. : ἐστι DEH ἐστιν ὅτι G ‖ 27 πολλοσταὶ Heiberg : πολλαὶ codd.

certains de ceux qui sont dans la même proportion sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même proportion éloigné du plus grand des facteurs d'autant de nombres dont le plus petit facteur est éloigné, en proportion, de l'unité, et il sera éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les facteurs sont éloignés de l'unité. Soit en effet les nombres A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I, K, Λ, en proportion à partir de l'unité, et soit A l'unité ; multiplions Δ par Θ, et soit X le produit. Prenons donc dans la proportion le nombre Λ dont la distance à Θ compte autant de nombres que la distance de Δ à l'unité ; il faut démontrer que X est égal à Λ. Du moment donc que, parmi des nombres en proportion, la distance de Δ à A compte autant de nombres que celle de Λ à Θ, le rapport de Δ à A est égal au rapport de Λ à Θ. Or Δ est le produit de Δ par A, d'où il suit que Λ est le produit de Δ par Θ ; par conséquent Λ est égal à X. Il est donc évident que le produit est dans la (sc. même) proportion, et que sa distance au plus grand facteur compte autant de nombres que la distance du plus petit facteur à l'unité. Mais il est aussi clair que ce produit est éloigné, de l'unité, de la somme, moins un, des distances des nombres Δ et Θ à l'unité ; car A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ sont les nombres dont Θ est éloigné de l'unité, et I, K, Λ sont, à un nombre près, ceux dont Δ est éloigné de l'unité ; en ajoutant Θ, on a la somme des distances[1].

1. Dans la suite de nombres proportionnels :

$$1, a^1, a^2, \dots a^{n-1}, a^n, \dots a^m, a^{m+1}, \dots a^{m+n}$$

où le rang de chaque nombre est égal à son exposant augmenté de 1, la distance du produit $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ à a^m est donc mesurée par $(n+1)$ nombres, et sa distance à l'unité par $(m+n+1)$ nombres ; or $m+n+1 = (m+1)+(n+1) - 1$.

μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζωντί τινες ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάττων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει, ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάττονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. Ἔστων γὰρ ἀριθμοί τινες ἀνάλογον ἀπὸ μονάδος οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ, μονὰς δὲ ἔστω ὁ Α, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ Δ τῷ Θ, ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ Χ. Λελάφθω δὴ ἐκ τῆς ἀναλογίας ὁ Λ ἀπέχων ἀπὸ τοῦ Θ τοσούτους, ὅσους ὁ Δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει· δεικτέον ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Χ τῷ Λ. Ἐπεὶ οὖν ἀνάλογον ἐόντων ἀριθμῶν ἴσους ἀπέχει ὅ τε Δ ἀπὸ τοῦ Α καὶ ὁ Λ ἀπὸ τοῦ Θ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὁ Δ ποτὶ τὸν Α, ὃν ὁ Λ ποτὶ τὸν Θ. Πολλαπλασίων δέ ἐστιν ὁ Δ τοῦ Α τῷ Δ· πολλαπλασίων ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ Λ τοῦ Θ τῷ Δ· ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ Λ τῷ Χ. Δῆλον οὖν ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστιν καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους ἴσους ἀπέχων, ὅσους ὁ ἐλάττων ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει. Φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἑνὶ ἐλάττονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ τᾶς μονάδος οἱ Δ, Θ· οἱ μὲν γὰρ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τοσοῦτοί ἐντι, ὅσους ὁ Θ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει, οἱ δὲ Ι, Κ, Λ ἑνὶ ἐλάττονες ἢ ὅσους ὁ Δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει· σὺν γὰρ τῷ Θ τοσοῦτοί ἐντι.

1 ἐόντων EG : ἐώντων DH ‖ πολλαπλασιάζωντί Heiberg : πολλαπλασιάζοντες codd. ‖ 2 ὁ γενόμενος Wallis : ὅταν ὁμοίως codd. ‖ 3 μὲν τοῦ μείζονος Heiberg : μὲν οὖν codd. ‖ 5 ἀπέχει E : ἀπέχῃ DGH ‖ 7 ὁ add. Heiberg ‖ οὓς Wallis : ὡς codd. ‖ ἀπέχοντι E : ἀπέχωντι DGH ‖ 9 μονάδος GH : μάδος DE ‖ 11 Χ. Λελάφθω Heiberg : ΧΛ εἰλήφθω codd. ‖ ἐκ Heiberg : ὁ ΘΚ codd. ‖ 12 Λ Wallis : ΦΛ codd. ‖ 13 μονάδος GH : μάδος DE ‖ 14 ἀριθμῶν Heiberg : ἴσων codd. ‖ 15 τὸν αὐτὸν GH : τὰν αὐτὰν DE ‖ 20 ἴσους Heiberg : ἴσον codd. ‖ 24 οἱ Δ, Θ · οἱ μὲν γὰρ Heiberg : οἵδε μὲν γὰρ οἱ codd. ‖ 25 ἑνὶ G : ἐπὶ DEH.

IV. Ce qui précède étant en partie admis, en partie démontré, je vais démontrer ma proposition. Comme nous avons supposé le diamètre de la graine de pavot non inférieur au quarantième d'un doigt, il est évident que la capacité de la sphère ayant un diamètre d'un doigt ne dépasse pas celle de soixante-quatre mille graines de pavot ; car ce nombre indique combien de fois elle est multiple de la sphère ayant pour diamètre un quarantième de doigt ; il a été démontré, en effet, que les sphères ont entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres[1]. Comme on a supposé, d'autre part, que le nombre des grains de sable contenus dans un volume égal à celui d'une graine de pavot ne dépasse pas dix mille[2], il est évident que, si la sphère ayant un diamètre d'un doigt était remplie de sable, le nombre des grains ne dépasserait pas soixante-quatre mille myriades. Or ce nombre représente six unités de nombres seconds augmentées de quatre mille myriades de premiers nombres ; il est donc inférieur à dix unités de nombres seconds. La sphère d'un diamètre de cent doigts est équivalente à cent myriades de sphères d'un diamètre d'un doigt, puisque les sphères ont entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres[1]. Si on avait maintenant une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de cent doigts, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit des dix myriades de

1. Cf. Eucl. XII, 18.
2. Cf. II, fin.

IV. Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδεδειγμένων, τὸ προκείμενον δειχθήσεται. Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τετρωκοστομόριον δακτύλου, δῆλον ὡς ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον οὐ μείζων ἐστὶν ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας καὶ τετρακισχιλίας· τᾶς γὰρ σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον τετρωκοστομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶν τῷ εἰρημένῳ ἀριθμῷ· δέδεικται γάρ τοι ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων. Ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται καὶ τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν τοῦ εἰς τὸ τᾶς μάκωνος μέγεθος μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, δῆλον ὡς, εἰ πληρωθείη ψάμμου ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων κα εἴη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ ἑξακισμύρια καὶ τετρακισχίλια. Οὗτος δέ ἐστιν ὁ ἀριθμὸς μονάδες τε ς̄ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν καὶ τῶν πρώτων μυριάδες τετρακισχίλιαι· ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἢ ῑ μονάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ἁ δὲ τῶν ρ̄ δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα πολλαπλασία ἐστὶν τᾶς δακτυλιαίαν ἐχούσας τὰν διάμετρον σφαίρας ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν διὰ τὸ τριπλάσιον λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων τὰς σφαίρας. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον δακτύλων ρ̄, δῆλον ὡς ἐλάττων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δέκα μονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν

4 ἁ alt. add. Heiberg || 7 τετρωκοστομόριον Ahrens : τετρακοστομόριον codd. || 10 ἔχοντι E : ἔχωντι DGH || 11 τοῦ alt. add. Heiberg || μάκωνος GH : μάκονος DE || 12 μείζονα Wallis : μεῖζον codd. || 14 μείζων Wallis : μεῖζον codd. || εἴη Wallis : ιν codd. || 17 μονάδες Riualtus : μυριάδες codd. || 20 τὰν GH : τῶν DE || σφαίρας Heiberg : ἔφη codd. || 21 διαμέτρων Wallis : διάμετρον codd. || 25-26 πολλαπλασιασθεισᾶν GH : πολλαπλασθεισᾶν DE.

nombres seconds par cent myriades. Mais comme les dix unités de nombres seconds constituent le dixième nombre à partir de l'unité dans la suite proportionnelle de raison dix, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le nombre obtenu sera le seizième à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle ; car on a démontré[1] que la distance de ce produit à l'unité est égale à la somme, diminuée de un, des distances, à l'unité, de ses deux facteurs. De ces seize nombres les huit premiers font partie, avec l'unité, des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants font partie des nombres seconds, et le dernier d'entre eux est de mille myriades de nombres seconds. Il est dès lors évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de cent doigts est inférieur à mille myriades de nombres seconds. De même, le volume de la sphère d'un diamètre d'une myriade de doigts est cent myriades de fois multiple du volume de la sphère d'un diamètre de cent doigts. Si on avait maintenant une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de dix mille doigts, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit des mille myriades de nombres seconds par cent myriades. Mais comme mille myriades de nombres seconds sont le seizième nombre à partir de l'unité dans la suite proportionnelle, et que cent myriades sont le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite propor-

1. Cf. III, milieu.

ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν δέκα μονάδες δέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐν τᾷ τῶν δεκαπλασίων ὅρων ἀναλογίᾳ, αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἀριθμὸς ἐσσεῖται τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος· δέδεικται γὰρ ὅτι ἑνὶ ἐλάσσονας ἀπέχει ἀπὸ τᾶς μονάδος ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. Τῶν δὲ ἑκκαίδεκα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ ὁ ἔσχατός ἐστιν αὐτῶν χίλιαι μυριάδες δευτέρων ἀριθμῶν. Φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ρ̄ δακτύλων ἐχούσᾳ ἔλαττόν ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ ἁ σφαῖρα ἁ τῶν μυρίων δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον πολλαπλασία ἐστὶν τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον ρ̄ δακτύλων ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ ἔχουσα σφαῖρα τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μυριάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες ἑκκαιδέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐν τᾷ

1 ἐπεὶ Wallis : ἐπὶ codd. || δ' αἱ Gertz : δὲ codd. || 3 τᾷ Wallis : τε codd. || δεκαπλασίων Wallis : δεκαπλεύρων codd. || ἀναλογίᾳ Wallis : ἀνάλογον codd. || 5 ἀριθμὸς Heiberg : εκτος codd. || 7 ἑνὶ Riualtus : ἐν codd. || ἀπέχει add. Wallis || ἢ ὅσος Wallis : ασσος DE ᾇ ὅσος GH || 8 ὁ ἀριθμὸς Wallis : ἐλάττων codd. || συναμφοτέρων Wallis : σύναμφο δὲ codd. || ἀπέχοντι EG : ἀπέχωντι DH || 14 τὰν Wallis : τε τὰν codd. || 15 ἔλαττόν Wallis : ἐλάττων codd. || 26 ἀνάλογον, αἱ Wallis : ἀναλογίαι codd.

tionnelle, il est évident que le produit sera le vingt-deuxième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle[1]. De ces vingt-deux nombres les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants font partie des nombres appelés seconds, et les six restants des nombres appelés troisièmes, le dernier d'entre eux étant de dix myriades de nombres troisièmes. Il est dès lors évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de dix mille doigts est inférieur à dix myriades de nombres troisièmes. Et comme la sphère ayant un diamètre d'un stade est inférieure à la sphère d'un diamètre de dix mille doigts, il est évident qu'aussi le nombre des grains de sable contenus dans un volume équivalent à celui d'une sphère d'un diamètre d'un stade est inférieur à dix myriades de nombres troisièmes. De même, le volume d'une sphère d'un diamètre de cent stades est cent myriades de fois multiple du volume d'une sphère ayant un diamètre d'un stade. Si on avait maintenant une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de cent stades, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit de dix myriades de nombres troisièmes par cent myriades. Et comme les dix myriades de nombres troisièmes sont le vingt-deuxième nombre, à partir de l'unité, dans la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera le vingt-huitième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle[1]. De ces vingt-huit nombres les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants des nombres seconds, les huit suivants

1. Cf. III, milieu.

αὐτᾷ ἀναλογίᾳ, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δυοκαιεικοστὸς τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. Τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τούτους τῶν δευτέρων καλουμένων, οἱ δὲ λοιποὶ ἓξ τῶν τρίτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Φανερὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ μυρίων δακτύλων ἔλασσόν ἐστιν ἢ ῑ μυριάδες τρίτων ἀριθμῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἁ σταδιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδιαίαν ἔλασσόν ἐστιν ἢ ῑ μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̄ σταδίων πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδιαίαν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̄ σταδίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δέκα μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσι. Καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν τρίτων ἀριθμῶν δέκα μυριάδες δυοκαιεικοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ὀκτωκαιεικοστὸς ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. Τῶν δὲ ὀκτὼ καὶ εἴκοσι τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ

4-5 μετὰ τούτους Heiberg : μετὰ τοὺς codd. || 5 τῶν pr. add. Heiberg || ἓξ Wallis : ἐκ codd. || 6 τρίτων G : τριῶν DEH || 8 μέγεθος G : μεγέθους codd. || 19 ἁ add. Wallis.

des *nombres troisièmes*, et les *quatre restants* des nombres appelés quatrièmes, le dernier étant de mille unités de nombres quatrièmes. Il est dès lors évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de cent stades est inférieur à *mille unités* de nombres quatrièmes. De même, le volume d'une sphère d'un diamètre de dix mille stades est cent myriades de fois multiple du volume d'une sphère ayant un diamètre de cent stades. Si on avait donc une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de dix mille stades, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit de mille unités de nombres quatrièmes par cent myriades. Comme les mille unités de nombres quatrièmes représentent le vingt-huitième nombre, à partir de l'unité, dans la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera, dans la même suite proportionnelle, le trente-quatrième nombre à partir de l'unité. Or de ces trente-quatre nombres, les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants des nombres seconds, les huit suivants des nombres troisièmes, les huit suivants des nombres quatrièmes, et les deux restants des nombres appelés cinquièmes, le dernier d'entre eux étant de dix unités de nombres cinquièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de dix mille stades sera inférieur à dix unités de nombres cinquièmes. Et de même, le volume d'une sphère d'un diamètre de cent myriades

τῶν τρίτων, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν τετάρτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. Φανερὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̄ ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον μυρίων σταδίων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄ ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δῆλον ὅτι ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν τετάρτων ἀριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτωκαιεικοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δ' ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας τέταρτος καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος. Τῶν δὲ τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων, οἱ δὲ λοιποὶ δύο τῶν πέμπτων καλουμένων ἐσσοῦνται, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι δέκα μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων ἔλασσον ἐσσεῖται ἢ ῑ μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄ μυριάδων πολλα-

11 διάμετρον GH : διαμέτρων DE ‖ ἔλασσον EGH : ἐλάσσων D ‖ 22 ἄλλοι Basil. : οἱ ἄλλοι codd. ‖ 25 μονάδες G : μονάδων DEH ‖ 26 μέγεθος GH : μεγέθους DE ‖ 27 ἔλασσον G : ἐλάσσων DEH ‖ 29 μυριάδων Basil. : μυριάδας codd.

de stades est cent myriades fois multiple du volume d'une sphère d'un diamètre de dix mille stades. Si on avait donc une sphère, remplie de sable, de la grandeur de la sphère d'un diamètre de cent myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit de dix unités de nombres cinquièmes par cent myriades. Comme les dix unités de nombres cinquièmes représentent le trente-quatrième nombre à partir de l'unité dans la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera, dans la même suite proportionnelle, le quarantième nombre à partir de l'unité. Or de ces quarante nombres les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants des nombres seconds, les huit suivants des nombres troisièmes, les huit suivants des nombres quatrièmes, les huit suivants des nombres appelés cinquièmes, le dernier d'entre eux étant de mille myriades de nombres cinquièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de cent myriades de stades est inférieur à mille myriades de nombres cinquièmes. Mais le volume d'une sphère d'un diamètre de dix mille myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère d'un diamètre de cent myriades de stades. Dès lors, si on avait une sphère, remplie de sable, de la grandeur d'une sphère d'un diamètre de dix mille myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de

πλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς τὰν διάμετρον ἐχούσας σταδίων μυρίων ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄ μυριάδων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες τέταρτός ἐστι καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσσεῖται τετρωκοστὸς ἀπὸ μονάδος. Τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ ταῦτα ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̄ μυριάδων ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριᾶν μυριάδων πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ̄ μυριάδων ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Εἰ δὴ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριᾶν μυριάδων, φανερὸν ὅτι ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ

1 τᾶς alt. add. Heiberg || 13 καλουμένων DEG : καμένων H || 20 μυριάδων Wallis : μυριάδες codd. || 21 ἔλασσόν E : ἐλάσσων DGH || 22 σφαῖρα DG : σφαίρας EH || μυριᾶν Wallis : μυρίας codd. || 25 δὴ Heiberg : δὲ codd. || 27 μυριᾶν Wallis : μυρίας codd. || ἔλασσον GH : ἐλάσσων DE.

sable y serait inférieur au produit de mille myriades de nombres cinquièmes par cent myriades. Or comme les mille myriades de nombres cinquièmes représentent le quarantième nombre, à partir de l'unité, dans la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera le quarante-sixième nombre à partir de l'unité. De ces quarante-six nombres, les huit premiers, avec l'unité, font partie des nombres appelés premiers nombres, les huit suivants des nombres seconds, les huit suivants des nombres troisièmes, les huit suivants des nombres quatrièmes, les huit suivants, placés à la suite des nombres quatrièmes, des nombres cinquièmes, et les six restants des nombres appelés sixièmes, le dernier d'entre eux étant de dix myriades de nombres sixièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de dix mille myriades de stades est inférieur à dix myriades de nombres sixièmes. Mais le volume d'une sphère d'un diamètre de cent myriades de myriades de stades est cent myriades de fois multiple du volume d'une sphère d'un diamètre de dix mille myriades de stades. Si on avait donc une sphère, remplie de sable, de la grandeur d'une sphère d'un diamètre d'un million de myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit de dix myriades de nombres sixièmes par cent myriades. Or du moment que les dix myriades de nombres

ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες τετρωκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἕκτος καὶ τετρωκοστὸς ἀπὸ μονάδος. Τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ ἓξ τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τούτους τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ ἓξ τῶν ἕκτων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι ῑ μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. Φανερὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάδων μυριᾶν ἔλασσόν ἐστιν ἢ ῑ μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. Ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄ πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων μυριάδων μυριᾶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄, φανερὸν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος ἔλασσον ἐσσεῖται τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν ῑ μυριάδων τῶν ἕκτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν. Ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν ἕκτων ἀριθμῶν δέκα

1 πολλαπλασιασθεισᾶν G : πολλαπλάσιον DEH ‖ 8 ὀκτὼ μὲν Wallis : εἶμεν DEH οἱ μὲν ὀκτὼ G ‖ 9 μετὰ τούτους EH : μετὰ τοὺς DG ‖ 12 ἓξ Wallis : om. DEH τῶν ἓξ G ‖ 13 αὐτῶν G : αὐτὸς DEH ‖ μυριάδες Wallis : μυριάδων codd. ‖ 16 μυριάδων μυριᾶν Heiberg : μυριάκις μυριάδων μυριῶν codd. ‖ ἔλασσόν Riualtus : ἐλάσσων codd. ‖ 18 ἔχουσα GH : ἐχούσας DE ‖ 20 μυριάδων μυριᾶν Heiberg : μυριάδας μυρίας DEH μυριάκις μυρίων G ‖ 24 πολλαπλασιασθεισᾶν G : πολλαπλασίων DEH ‖ 25-26 ταῖς ρ̄ μυριάδεσσιν Wallis : τᾶν ρ̄ μυριάδες codd.

sixièmes représentent le quarante-sixième nombre, à partir de l'unité, de la suite proportionnelle, et les cent myriades le septième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera le cinquante-deuxième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle. Or de ces cinquante-deux nombres les quarante-huit premiers, avec l'unité, appartiennent aux nombres appelés premiers nombres, nombres seconds, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes et sixièmes, et les quatre restants font partie des nombres appelés septièmes, le dernier d'entre eux étant de mille unités de nombres septièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable dont le volume est égal à celui d'une sphère d'un diamètre de cent myriades de myriades de stades est inférieur à mille unités de nombres septièmes. Comme on a démontré que le diamètre du monde est inférieur à cent myriades de myriades de stades[1], il est évident que le nombre des grains de sable remplissant un volume égal à celui du monde est, lui aussi, inférieur à mille unités de nombres septièmes. Nous avons ainsi démontré que le nombre des grains de sable remplissant un volume égal à celui du monde, tel que l'entendent la plupart des astronomes, est de mille unités de nombres septièmes ; nous allons démontrer maintenant que le nombre des grains de sable, remplissant un volume qui serait même égal à celui d'une sphère aussi grande qu'Aristarque suppose celle des étoiles fixes, est inférieur à mille myriades de nombres huitièmes. Comme on a supposé, en effet, que le rapport de la terre à ce que nous appelons communément le monde est égal au rapport de ce monde à la sphère des étoiles fixes telle que la suppose Aristarque, les diamètres de ces sphères ont entre eux le même rapport[2]. Or il a été démontré que le diamètre du monde est inférieur à une longueur dix mille fois multiple du

1. Cf. II, début.
2. Cf. Eucl. XII, 18.

μυριάδες ἕκτος καὶ τετρωκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̄ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δυοκαιπεντακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. Τῶν δὲ δύο καὶ πεντήκοντα τούτων οἱ μὲν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τᾷ μονάδι οἵ τε πρῶτοι καλούμενοι ἐντὶ καὶ οἱ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἑβδόμων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι χίλιαι μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. Φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄ ἔλασσόν ἐστιν ἢ ,ᾱ μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐοῦσα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̄, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ ,ᾱ μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. Ὅτι μὲν οὖν τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ ,ᾱ μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν δέδεικται· ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ ταλικαύτᾳ, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ,ᾱ μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν δειχθήσεται. Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν γᾶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὸν ὑφ᾽ ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, ἃν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, καὶ αἱ διάμετροι τᾶν σφαιρᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἀλλάλας. Ἁ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς δέδεικται ἐλάσσων

11 τὰν EG : τῶν DH ‖ 12 ἔλασσόν E : ἐλάσσων DGH ‖ 17 οὖν Heiberg : ὁμοίως post lac. codd. ‖ 23 ἔλασσόν G : ἐλάσσων DEH ‖ 25 τὸν EGH : τῶν D ‖ 28 ἔχοντι EG : ἔχωντι D ; ἀλλάλας G : ἄλλας DEH.

diamètre de la terre[1] ; il est donc évident que le diamètre de la sphère des fixes est, lui aussi, inférieur à une longueur dix mille fois multiple du diamètre du monde. Or comme les sphères ont entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres, il est clair que la sphère des fixes telle que la suppose Aristarque est inférieure à un volume dix mille myriades de myriades de fois multiple du volume du monde. Mais on a démontré que le nombre des grains de sable remplissant un volume égal à celui du monde est inférieur à mille unités de nombres septièmes ; il est dès lors évident que si une sphère, aussi grande qu'Aristarque suppose celle des étoiles fixes, était remplie de sable, le nombre des grains de sable y serait inférieur au produit des mille unités (sc. de nombres septièmes) par dix mille myriades de myriades. Et comme les mille unités de nombres septièmes représentent le cinquante-deuxième nombre à partir de l'unité dans la suite proportionnelle, et les dix mille myriades de myriades le treizième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera le soixante-quatrième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle ; mais ce nombre est le huitième des nombres huitièmes, qui est de mille myriades de nombres huitièmes. Il est par conséquent évident que le nombre des grains de sable remplissant une sphère de la grandeur qu'Aristarque prête à la sphère des étoiles fixes est inférieur à mille myriades de nombres huitièmes[2]. Je conçois, roi Gélon, qu'au commun des hommes, qui n'ont pas l'expérience

1. Cf. II, début.
2. C'est-à-dire, en notation moderne, inférieur à 10^{63}, nombre qu'on écrirait en faisant suivre le chiffre 1 de 63 zéros.

ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίων· δῆλον οὖν ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τᾶς τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου. Ἐπεὶ δὲ αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων, φανερὸν ὅτι ἁ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖρα, ἃν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσι πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. Δέδεικται δὲ ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ ,ᾱ μονάδες τῶν ἑϐδόμων ἀριθμῶν· δῆλον οὖν ὅτι, εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν ὁ Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μονάδων ταῖς μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσιν. Καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἑϐδόμων ,ᾱ μονάδες δυοκαιπεντακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται τέταρτος καὶ ἑξηκοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας· οὗτος δέ ἐστι τῶν ὀγδόων ὄγδοος, ὅς κα εἴη χίλιαι μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. Φανερὸν τοίνυν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρᾳ, ἃν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ,ᾱ μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. Ταῦτα δέ, βασιλεῦ Γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα

1 μυριοπλασίων Wallis : μυριοπλασίαν DH μυριοπλασία EG || 3 ἐπεὶ δὲ Wallis : ἐπειδὴ codd. || 4 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH || 7 μυρίαις Heiberg : om. DEG μυριάδων H || 8 ὅτι add. Riualtus || 9 ἔλασσόν G : ἐλάσσων DEH || 14 πολλαπλασιασθεισᾶν G : πολλαπλασιᾶν DEH || μονάδων DEH : μονάδων τῶν ἑϐδόμων ἀριθμῶν G || 15 ἑϐδόμων DEH : ἑϐδόμων ἀριθμῶν G || 17 αἱ add. Wallis || 21 ὅς κα εἴη Heiberg : καὶ πεντάκις EGH καὶ πέντα D || 23 τᾷ add. Wallis.

des mathématiques, ces choses paraîtront peu croyables ; ceux, en revanche, qui y sont versés et qui ont réfléchi sur les distances et les grandeurs de la terre, du soleil, de la lune et du monde dans sa totalité les accepteront grâce à ma démonstration, et c'est pourquoi j'ai cru qu'à toi aussi il serait agréable d'en prendre connaissance.

φανήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσιν καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθέων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἁλίου καὶ τᾶς σελήνας καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικότεσσιν πιστὰ διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι· διόπερ ᾠήθην καὶ τὶν οὐκ ἀνάρμοστον εἶμεν [ἔτι] ἐπιθεωρῆσαι ταῦτα.

5 τὶν Gomperz, Bergk : τινας codd. || εἶμεν Gomperz, Bergk : εἴη codd. || ἔτι codd. : del. Gomperz, Bergk.

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

NOTICE

Ce traité commence par l'énoncé de trois propositions relatives à la parabole, pour la démonstration desquelles Archimède renvoie le lecteur à des *Éléments des sections coniques*, c'est-à-dire, probablement, aux traités composés sur cette matière par Euclide et par Aristée[1]. Le premier de ces théorèmes affirme que dans toute parabole une corde parallèle à une tangente est divisée en deux parties égales par le diamètre passant par le point de contact et que, réciproquement, si une corde est divisée en deux parties égales par un diamètre de la parabole, la corde est parallèle à la tangente menée au point d'intersection du diamètre et de la parabole ; le deuxième, que le point de rencontre E entre une tangente menée à une parabole en un point Γ et un diamètre de la parabole est symétrique, par rapport au point B où le diamètre coupe la parabole, du point d'intersection Δ du diamètre avec la corde ΑΓ menée par le point Γ parallèlement à la tangente en B. Le troisième énoncé rappelle que les carrés des segments EZ et ΑΔ interceptés par une parabole et un diamètre sur deux droites parallèles à la tangente menée par le point d'intersection B du diamètre avec la parabole sont entre eux comme les distances à B

1. Géomètre grec, contemporain d'Euclide, qui publia, dix ans avant la parution du *Traité des coniques* d'Euclide, un ouvrage en cinq livres sur les sections coniques sous le titre *Lieux solides*. Ce traité existait encore à l'époque de Pappus, alors que celui d'Euclide était déjà perdu à ce moment.

des points d'intersection des deux parallèles avec le diamètre. Si le diamètre est l'axe de la parabole, ceci revient à dire, en terminologie cartésienne, que les carrés sur les abscisses de deux points d'une parabole $y = ax^2$ sont entre eux comme leurs ordonnées. Ces trois propositions figureront, après Archimède, dans le traité *Des coniques* d'Apollonios, I, 46 ; I, 25 et I, 20. Deux autres propriétés de la parabole qu'Archimède fera intervenir dans ses raisonnements font l'objet des démonstrations des propositions 4 et 5.

La quadrature de la parabole, c'est-à-dire la démonstration du théorème d'après lequel tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur — la hauteur s'entendant comme la longueur de la perpendiculaire abaissée, sur la base, du point de contact de la tangente menée à la parabole parallèlement à la base — nous est présentée dans ce traité au moyen de deux méthodes différentes dont l'emploi successif reflète d'une manière particulièrement nette la manière dont une vérité mathématique se faisait jour dans l'esprit d'Archimède. A l'origine d'une découverte mathématique de ce genre se situe chez lui l'intuition d'une relation simple entre une aire limitée en partie par une figure curviligne définie d'une manière exacte, comme la parabole, et une figure rectiligne inscrite ayant certains éléments communs avec le segment de figure curviligne à évaluer. Cette intuition est vérifiée, en second lieu, par la pesée des figures comparées, réalisées matériellement sur des plaques minces homogènes. La pesée expérimentale est analysée théoriquement, dans une troisième phase de l'investigation, par l'application de la statique du levier, telle qu'Archimède la décrit dans son traité *De l'équilibre des figures planes*, aux tranches obtenues par la décomposition des deux figures. Cette méthode des tranches indivisibles manquant de rigueur logique, l'enquête est couronnée par une démonstration exacte au moyen de la méthode généralisée d'Eudoxe. Il est probable que la pensée d'Archimède a suivi un

chemin semblable, par quatre étapes, même là où, comme dans le traité *De la sphère et du cylindre*, les résultats de l'enquête sont présentés comme acquis par le seul raisonnement géométrique, c'est-à-dire même là où Archimède ne nous fait assister qu'à la partie finale de son ascension vers la certitude mathématique. Ici, dans le traité *De la quadrature de la parabole*, la quadrature du segment de parabole est faite successivement par le procédé statique, dans les propositions 6-17, et par la méthode géométrique, dans les propositions 18-24.

La découverte qui fait l'objet de ce traité représente la première quadrature exacte d'une aire partiellement curviligne dans l'histoire des mathématiques. Plusieurs géomètres avant Euclide s'étaient vainement attaqués au fameux problème de la quadrature du cercle qui hantera les esprits pendant toute l'antiquité. Sans nommer de noms, Archimède fait allusion, dans la préface de ce traité à l'adresse de Dosithée, aux travaux de ces chercheurs, parmi lesquels il faut compter Anaxagore, Antiphon et Bryson. Il considérait sa rectification du périmètre du cercle et la détermination correspondante d'une aire équivalente au cercle comme des approximations *provisoires*. La raison pour laquelle la quadrature devait réussir dans le cas de la parabole et échouer dans celui du cercle lui échappait. Elle ne sera découverte qu'en 1882, quand Lindemann[1] arrivera à démontrer, avec la transcendance du nombre π, l'impossibilité d'une solution pour ce problème millénaire.

Le texte du traité *La quadrature de la parabole* est établi d'après les manuscrits 𝔏, D, E, G, H.

1. F. Lindemann, 1852-1939, réussit en 1882 à démontrer que le rapport π du périmètre d'un cercle à son diamètre est un nombre transcendant, c'est-à-dire un nombre qui ne peut être la racine d'une équation algébrique.

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

Archimède à Dosithée, prospérité !

Quand j'appris que Conon, dont l'amitié ne m'avait jamais fait défaut, était mort, que tu avais été lié avec Conon et que tu es expert en géométrie, je fus affligé de la mort d'un homme qui était à la fois un ami et un esprit remarquable en mathématiques, et je pensai à t'envoyer par écrit, comme j'avais eu l'intention de le faire à Conon, un théorème de géométrie, qui n'avait pas été étudié auparavant, mais que j'ai étudié maintenant, en le démontrant par la géométrie après l'avoir découvert par la mécanique. Certains des géomètres anciens se sont efforcés de montrer par écrit qu'il est possible de trouver une aire rectiligne équivalente à l'aire d'un cercle donné ou à celle d'un segment de cercle donné[1], après quoi ils ont essayé de carrer l'aire comprise entre une section de cône entier[2] et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles, et c'est là la raison pour laquelle la plupart ont jugé que ces propositions n'ont pas été inventées par eux. En ce qui concerne le segment compris entre une droite et une parabole, nous savons qu'aucun

1. Allusion aux tentatives de quadrature du cercle par Antiphon, Bryson, Hippias (au moyen de la « quadratrice ») et Hippocrate de Chios (au moyen des « lunules »). Avant Archimède, les procédés d'Antiphon et de Bryson ont été jugés sévèrement par Aristote, *Soph. El.* 171 b 12-18 ; 171 b 34-172 a 7 ; *Phys.* 185 a 14-17 ; et *passim.* Nous devons la connaissance d'une partie de ces travaux aux pages que leur a consacrées Eudème et que Simplicius cite dans son Commentaire à la *Physique* d'Aristote ; cf. Simpl. *Phys.*, éd. Diels, p. 60-68.

2. Le mot « entier », ὅλου, n'a pas de sens ; il est probable que le texte a été altéré ici par un copiste.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Τετραγωνισμὸς παραβολῆς

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν.

Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐπιλείπων ἁμῖν ἐν φιλίᾳ, τὶν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημες ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεναμένου καὶ ἐν τοῖς μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος, ἐπροχειριξάμεθα δὲ ἀποστεῖλαί τοι γράψαντες, ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες ἦμες, γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δὲ ὑφ' ἁμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. Τῶν μὲν οὖν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησάν τινες γράφειν ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι καὶ κύκλου τμάματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐχ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθεν. Τὸ δὲ ὑπ' εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμᾶμα

3-4 οὐδὲν ἐπιλείπων Heiberg : ἔτι λείπων DEGH om. ℒ || 4 τὶν Heiberg : τινὰ codd. || 6 καὶ DEGH : om. ℒ || 8 τοι add. Torellius || 9 ἐγνωκότες ἦμες Heiberg : ἐγνωκότες ἦμεν H ἐγνωκότες εἶμεν DEG consueueramus ℒ || 10 ἁμῶν Heiberg : ἡμῶν DEGH aliis ℒ || 12 καὶ DEGH : om. ℒ || ἐπιδειχθέν. Τῶν DEGH : demonstratis ℒ || οὖν add. Heiberg || 14 ἐὸν DEGH : erat ℒ || 16 ταῦτα DEGH : hoc ℒ || 18 διόπερ Torellius : ὅπερ DEGH quae quidem ℒ || 20 δὲ ὑπ' εὐθείας Torellius : om. DEGH autem (contentam) a ℒ || τε add. Heiberg || καὶ DEGH : om. ℒ.

des géomètres anciens n'en a cherché la quadrature, que nous avons trouvée maintenant ; nous démontrons, en effet, que tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment, en admettant pour la démonstration le lemme[1] que voici : l'excès de la plus grande de deux aires inégales sur la plus petite peut dépasser, s'il est ajouté (sc. un nombre suffisant de fois) à lui-même, toute aire finie donnée. Or les géomètres antérieurs ont fait appel eux aussi à ce lemme ; car c'est en se servant de ce lemme qu'ils ont démontré que les cercles ont entre eux le rapport des carrés sur leurs diamètres[2] et que les sphères ont entre elles le rapport des cubes sur leurs diamètres[3], et ils ont démontré que toute pyramide est équivalente au tiers du prisme[4] ayant même base et même hauteur que la pyramide, et que tout cône est équivalent au tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que le cône[5], en prenant un lemme semblable[6] à celui que nous venons d'indiquer. Il se trouve cependant que tous ces théorèmes cités sont considérés comme non moins vrais que ceux qui ont été démontrés sans ce lemme ; il me suffit d'avoir amené au même degré de certitude ceux que je publie maintenant. Je t'envoie donc les démonstrations que j'ai rédigées pour le théorème (sc. indiqué), en montrant d'abord comment je l'ai examiné par la mécanique, ensuite aussi comment je l'ai prouvé par la géométrie. Je ferai précéder, de plus, mes démonstrations de propositions élémentaires sur les coniques utiles pour la démonstration. Sois en bonne santé.

1. Cf. Eucl. V, déf. 4 ; Archim., *Des Spirales,* fin de la lettre à Dosithée.
2. Cf. Eucl. XII, 2.
3. Cf. Eucl. XII, 18.
4. Cf. Eucl. XII, 7.
5. Cf. Eucl. XII, 10.
6. Cf. Eucl. X, 1.

περιεχόμενον οὐδένα τῶν προτέρων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἁμῶν εὕρηται· δείκνυται γὰρ ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμάματι λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. Κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι· τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλους τᾶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι χρώμενοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῷ προειρημένῳ λῆμμά τι λαμβάνοντες ἔγραφον. Συμβαίνει δὲ τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων. Ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες πρῶτον μὲν ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. Προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν. Ἔρρωσο.

1 προτέρων Heiberg : πρώτων codd. || 8 ἑαυτᾷ add. Heiberg || 12 αὐτῷ τούτῳ Heiberg : αὐτῷ DEGH hoc 𝔊 || 14 ὅτι add. Heiberg || πυραμὶς GH : μυραμὶς DE || 18 ὁμοῖον Heiberg : ὁμοίως codd. || 19 λῆμμά τι Heiberg : λήμματι codd. || δὲ add. Torellius || 21 τοῦ λήμματος DEGH : om. 𝔊 || 22 ἀρκεῖ Heiberg : ἄρτι DEGH sufficit 𝔊 || τούτοις Heiberg : τούτου codd. || ἀναγμένων Heiberg : ἀναγομένων G ἀναγμένον DEH𝔊.

1.

Si on a une parabole ΑΒΓ, une droite ΒΔ parallèle au diamètre ou elle-même diamètre, et une droite ΑΓ menée parallèlement à la tangente à la conique au

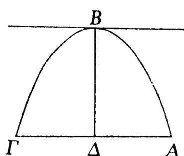


Fig. 59

point B, ΑΔ sera égal à ΔΓ ; et si ΑΔ est égal à ΔΓ, la droite ΑΓ et la tangente à la conique au point B seront parallèles[1].

2.

Si on a une parabole ΑΒΓ, une droite ΒΔ parallèle au diamètre ou elle-même diamètre, une droite ΑΔΓ

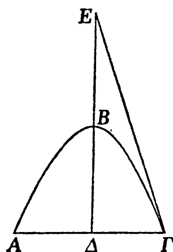


Fig. 60

1. Cf. Apollonius I, 46.

α′.

Εἴ κα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ᾖ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ ΑΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἴσα

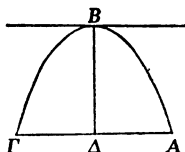


Fig. 59

ἐσσεῖται ἁ ΑΔ τᾷ ΔΓ · κἂν ἴσα ᾖ ἁ ΑΔ τᾷ ΔΓ, παράλληλοι ἐσσοῦνται ἅ τε ΑΓ καὶ ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς.

β′.

Εἴ κα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ, ᾖ δὲ ἁ μὲν ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ᾖ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ ΑΔΓ

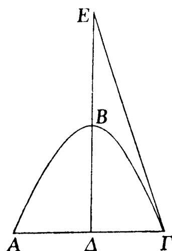


Fig. 60

2 ἁ δὲ Heiberg : ἡ δὲ codd. || 3 ἁ δὲ Heiberg : ἡ δὲ codd. || 5 τᾷ ΔΓ alt. mss. Gℒ : om. DEH || 6 ἅ τε Gℒ : αἵτε DEH || ἐπιψαύουσα Gℒ : ἐπιψαύουσαι DEH.

parallèle à la tangente à la conique au point B, et une droite EΓ tangente à la conique au point Γ, BΔ et BE seront égaux[1].

3.

Si on a une parabole ABΓ et une droite BΔ parallèle au diamètre ou elle-même diamètre, et si on mène les droites AΔ et EZ parallèlement à la tangente à la

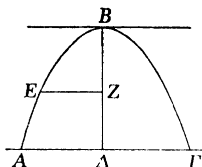


Fig. 61

conique au point B, le rapport de BΔ à BZ sera égal au rapport du carré sur AΔ au carré sur EZ[2].

Ces propriétés ont été démontrées dans les Éléments[3] relatifs aux coniques.

4.

Soit ABΓ un segment compris entre une droite et une parabole ; que du milieu de AΓ une droite BΔ soit menée parallèlement au diamètre ou qu'elle soit elle-même un diamètre ; joignons B à Γ et prolongeons BΓ. Si on mène une autre droite ZΘ parallèlement

1. Cf. Apoll. I, 35.
2. Cf. Apoll. I, 20.
3. C'est-à-dire dans les traités, perdus, consacrés par Aristée et par Euclide aux sections coniques.

παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ δὲ ΕΓ τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ Γ, ἐσσοῦνται αἱ ΒΔ, ΒΕ ἴσαι.

γ′.

Εἴ κα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ᾖ αὐτὰ διάμετρος, καὶ ἀχθέωντί τινες αἱ ΑΔ, ΕΖ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς

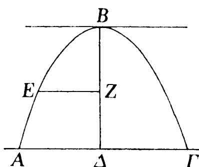


Fig. 61

τοῦ κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται, ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΖ, δυνάμει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΖ.

Ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ′.

Ἔστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΒΔ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω ᾖ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ ΒΓ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. Εἰ δή κα ἀχθῇ τις ἄλλα ἁ ΖΘ παρὰ τὰν ΒΔ τέμνουσα τὰν διὰ τῶν Β, Γ εὐθεῖαν,

5 ᾖ DEG𝔏 : om. H ‖ ὀρθογωνίου GH𝔏 : ὀρθογώνιον DE ‖ ἁ δὲ Torellius : ἡ δὲ DGH ᾖ δὲ E𝔏 ‖ 6 αὐτὰ 𝔏 : αὐτὰ ἁ G αὐτᾷ τᾷ DEH ‖ διάμετρος GB : διαμέτρῳ DEH ‖ ἀχθέωντί Heiberg : ἀχθῶσι E ἄχθωσαν DGH ‖ 7 παρὰ τὰν κατὰ τὸ B ms. 𝔏 : om. DEGH ‖ ἐπιψαύουσαν DEH𝔏 : ἐπιψαύουσαι G ‖ 8 BZ mss. DEH : BZ μάκει G, bz ita 𝔏 ‖ 10 δὲ 𝔏 : δὴ DEGH ‖ 13 τὸ DEGH : om. 𝔏 ‖ 15 κα ἀχθῇ Heiberg : καταχθείη DEGH producatur 𝔏 ‖ 16 B ms. 𝔏 : A mss. DEGH.

à BΔ, coupant la droite BΓ, le rapport de ZΘ à ΘH sera égal au rapport de ΔA à ΔZ.

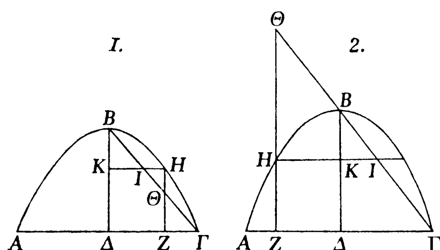


Fig. 62

Menons, en effet, par le point H la parallèle à AΓ, soit KH ; le rapport du carré sur ΔΓ au carré sur KH est ainsi égal au rapport de la longueur BΔ à la longueur BK ; car cette propriété a été démontrée[1]. Il s'ensuit que le carré sur BΓ sera au carré sur BΘ comme la longueur BΓ est à la longueur BI, puisque ΔZ et KH sont égaux[2]. Les segments de droite BΓ, BΘ et BI sont donc proportionnels[3], de façon que le rapport de BΓ à BΘ est égal[4] au rapport de ΓΘ à ΘI. Par conséquent, ΘZ est à ΘH comme ΓΔ est à ΔZ ; mais ΔΓ est égal à ΔA ; il est donc évident que le rapport de ΔA à ΔZ est égal au rapport de ZΘ à ΘH.

5.

Soit ABΓ un segment compris entre une droite et une parabole ; par le point A menons la parallèle ZA au diamètre, et par le point Γ la droite ΓZ, tangente à la parabole au point Γ. Dès lors, si on mène dans le triangle ZAΓ une parallèle à AZ, le rapport dans

1. Sc. par les géomètres antérieurs.
2. Cf. Eucl. VI, 2.
3. Cf. Eucl. V, déf. 9.
4. Cf. Eucl. V, 16, 18.

τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ.

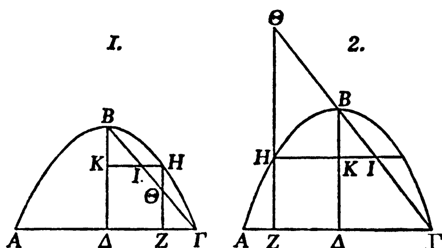


Fig. 62

Ἄχθω γὰρ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰν ΑΓ ἁ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΚ μάκει, οὕτως ἁ ΔΓ ποτὶ τὰν ΚΗ δυνάμει· ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἐσσεῖται ἄρα ὡς ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΙ μάκει, οὕτως ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΘ δυνάμει· ἴσαι γὰρ αἱ ΔΖ, ΚΗ· ἀνάλογον ἄρα ἐντὶ αἱ ΒΓ, ΒΘ, ΒΙ γραμμαί. Ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΘ, ὃν ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΙ· ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΖ, οὕτως ἁ ΘΖ ποτὶ τὰν ΘΗ. Τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἐστὶν ἁ ΔΑ· δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ, ὃν ἁ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ.

ε'.

Ἔστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΖΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ ἁ ΓΖ. Εἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ

3 Η ms. 𝔛 : Ι mss. DEGH ‖ ΚΗ mss. DEH : ΚΙ ms. G, hk ms. 𝔛 ‖ 4 ΚΗ Basil. : ΚΙ codd. ‖ 6 ποτὶ alt. — 7 ΒΓ ms. 𝔛 : om. DEGH ‖ 9-10 ΔΖ, οὕτως ἁ ΘΖ ποτὶ τὰν ΘΗ ms. 𝔛 : ΘΗ seq. lacuna DEGH.

lequel la (sc. partie de la) droite menée (sc. comprise entre ΓA et ΓZ) est divisée par la parabole sera égal au rapport dans lequel AΓ est divisé par la droite menée, et le segment partiel de AΓ situé du côté du point A correspondra au segment de la droite menée situé du côté du point A.

Fig. 63

Menons, en effet, une parallèle ΔE à AZ, et supposons d'abord AΓ divisé en deux parties égales par ΔE. Puisque ABΓ est une parabole, que BΔ est mené parallèlement au diamètre, et que AΔ est égal à ΔΓ, la tangente menée à la parabole au point B sera parallèle[1] à AΓ. D'autre part, du moment que ΔE est parallèle au diamètre, que du point Γ est menée la droite ΓE, tangente à la parabole au point Γ, et que, enfin, ΔΓ est parallèle à la tangente en B, le segment de droite EB est égal[2] à BΔ, de façon que le rapport de AΔ à ΔΓ est égal au rapport de ΔB à BE. Pour le cas où la parallèle menée divise AΓ en deux parties égales, la proposition est donc démontrée.

S'il n'en est pas ainsi, menons une autre parallèle KΛ à AZ. Il faut donc démontrer que le rapport de AK à KΓ est égal au rapport de KΘ à ΘΛ. Comme,

1. Cf. prop. 1.
2. Cf. prop. 2.

παρὰ τὰν ΑΖ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς καὶ ἁ ΑΓ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας [ἀνάλογον], ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς ΑΓ τὸ ποτὶ τῷ Α τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τῷ Α.

Fig. 63

Ἄχθω γάρ τις ἁ ΔΕ παρὰ τὰν ΑΖ, καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ ΔΕ τὰν ΑΓ δίχα. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ καὶ ἀγμένα ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ δὲ ΑΔ, ΔΓ ἴσαι, ἐσσεῖται τᾷ ΑΓ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. Πάλιν, ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν ἁ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἁ ΓΕ ἆκται ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἁ δὲ ΔΓ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ Β ἐπιψαυούσᾳ, ἴσα ἐστὶν ἁ ΕΒ τᾷ ΒΔ · ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΕ. Εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν ΑΓ, δέδεικται · εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ ΚΛ παρὰ τὰν ΑΖ · δεικτέον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΚΓ, ὃν ἁ ΚΘ ποτὶ τὰν ΘΛ. Ἐπεὶ γὰρ

3 ἀνάλογον DEGH : om. 𝓛 del. Basil., Torellius, Heiberg ‖ 4 τὸ ποτὶ τῷ Heiberg : ποτὶ τὸ codd. ‖ 5 τῷ Heiberg : τὰ DEGH τὸ 𝓛 ‖ 6 παρὰ 𝓛 : ποτὶ DEGH ‖ 18 τὰν pr. EG : τὸν DH.

en effet, BE est égal à BΔ, le segment de droite IΛ est aussi égal à KI. Le rapport de ΛK à KI est donc égal au rapport de AΓ à ΔA, et, d'autre part, le rapport de KI à KΘ est égal au rapport de ΔA à AK, car cette propriété a été démontrée antérieurement[1]. Par conséquent, le rapport de KΘ à ΘΛ est égal[2] au rapport de AK à KΛ ; la proposition est donc démontrée.

6.

Imaginons que le plan placé devant nous (sc. dans lequel nous opérons) soit perpendiculaire à l'horizon, et que ce qui est situé du côté d'une droite AB où se trouve le point Δ soit au-dessous, que, en revanche, ce qui est situé de l'autre côté de la droite soit au-dessus. Soit le triangle rectangle BΔΓ ayant l'angle droit en B et le côté BΓ égal à la moitié du levier, les segments AB et BΓ étant égaux. Que ce triangle soit suspendu aux points B et Γ, qu'une autre aire Z soit suspendue à l'autre partie du levier, au point A, et que l'aire Z, suspendue en A, fasse équilibre au triangle BΔΓ dans la position qu'il occupe maintenant. Je dis que l'aire Z est la troisième partie du triangle BΔΓ.

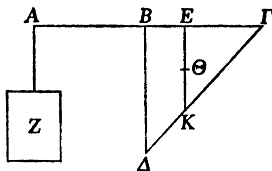


Fig. 64

1. Cf. prop. 4 et Eucl. V, 19, coroll.
2. Cf. Eucl. V, 17 ; 22 et V, 7, coroll.

ἴσα ἐστὶν ἁ ΒΕ τᾷ ΒΔ, ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ΙΛ τᾷ ΚΙ · τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΚΙ, ὃν ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΔΑ. Ἔχει δὲ καὶ ἁ ΚΙ ποτὶ τὰν ΚΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΚ · δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον · ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΚΘ ποτὶ τὰν ΘΛ, ὃν ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΚΓ. Δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ϛ′.

Νοείσθω δὲ τὸ [ὅτε ἐστὶν τὸ ἐν τᾷ θεωρίᾳ] προκείμενον [ὁρώμενον] ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, καὶ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς [ἔπειτα] τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἄνω, τὸ δὲ ΒΔΓ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Β γωνίαν καὶ τὰν ΒΓ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ [δηλονότι ἴσης οὔσης τᾶς ΑΒ τῇ ΒΓ], κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ Ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α κρεμάμενον τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. Φαμὶ δὴ τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΔΓ τριγώνου μέρος τρίτον εἶμεν.

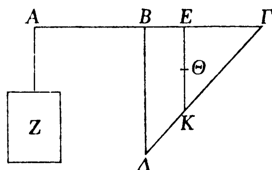


Fig. 64

2 ἁ ΛΚ ms. 𝔅 : om. DEGH ‖ 5 ὥστε 𝔅 : ὡς DEGH ‖ 8 τὸ pr. — 9 ὁρώμενον DEGH : propositum 𝔅 ‖ 9 ἐπίπεδον ὀρθὸν Heiberg : ἐπὶ ὀρθοῦ codd. ‖ 10 ἔπειτα DEGH : om. 𝔅 ‖ τὰ DEGH : hoc 𝔅 ‖ 10-11 κάτω νοείσθω G : κατανοείσθω codd. ‖ 11 τὰ DEGH : hoc 𝔅 ‖ 12 τῷ Heiberg : τὰ DEGH ‖ 18 ἔχοντι Torellius : ἔοντι codd.

Puisque, en effet, le levier est supposé être en équilibre, la ligne ΑΓ sera parallèle à l'horizon, et les perpendiculaires menées à ΑΓ dans le plan perpendiculaire à l'horizon seront perpendiculaires au plan de l'horizon. Coupons le segment de droite ΒΓ au point Ε de manière que ΓΕ soit le double de ΕΒ, menons la parallèle ΚΕ à ΔΒ, et divisons ΚΕ en deux parties égales par le point Θ. Dans le triangle ΒΔΓ, le centre de gravité sera ainsi le point Θ ; car cette propriété a été démontrée dans le Traité de mécanique[1]. Si donc la suspension du triangle ΒΔΓ aux points Β et Γ est supprimée, et si le triangle est suspendu en Ε, il restera dans sa position actuelle, puisque tout corps, suspendu en quelque point que ce soit, garde une position telle que le point de suspension et le centre de gravité du corps suspendu soient sur la même perpendiculaire (sc. sur la même verticale) ; car cette proposition a été démontrée elle aussi[2]. Puisque, donc, le triangle ΒΓΔ aura gardé la même position par rapport au levier, l'aire Ζ continuera à lui faire équilibre. Mais comme l'aire Ζ, suspendue au point Α, et le triangle ΒΔΓ, suspendu au point Ε, s'équilibrent, il est évident qu'ils sont inversement proportionnels aux distances[3], et que le segment de droite ΑΒ est à ΒΕ comme le triangle ΒΔΓ est à l'aire Ζ ; mais ΑΒ est triple de ΒΕ ; le triangle ΒΔΓ est donc lui aussi triple de l'aire Ζ.

Mais il est évident aussi que (sc. réciproquement) si le triangle ΒΔΓ est triple de l'aire Ζ, les deux figures s'équilibreront.

7.

Que ΑΓ soit de nouveau un levier ; soit Β son milieu et qu'il soit suspendu par ce point Β. Soit ΓΔΗ un

1. Cf. *De l'équilibre des figures planes* I, 14.
2. Sans doute dans un des ouvrages perdus d'Archimède, consacré à l'étude des centres de gravité.
3. Cf. *De l'équil. des fig. pl.* I, 6 et 7.

Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροπέων ὁ ζυγός, εἴη κα ἁ ΑΓ γραμμὰ παρὰ τὸν ὁρίζοντα, αἱ δὲ ποτ᾽ ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ ΑΓ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα κάθετοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. Τετμάσθω ἁ ΒΓ γραμμὰ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν ΓΕ τᾶς ΕΒ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΒ ἁ ΚΕ καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὴ ΒΔΓ τριγώνου κέντρον βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς· Εἴ κα οὖν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου ἁ μὲν κατὰ τὰ Β, Γ κρέμασις λυθῇ, κατὰ δὲ τὸ Ε κρεμασθῇ, μενεῖ τὸ τρίγωνον ὡς νῦν ἔχει· ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων, ἐξ οὗ σαμείου κα κατασταθῇ, μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. Ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ Ζ χωρίον. Ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν Ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ ΒΔΓ κατὰ τὸ Ε, δῆλον ὡς ἀντιπέπονθε τοῖς μάκεσιν, καί ἐστιν ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον. Τριπλασία δὲ ἁ ΑΒ τᾶς ΒΕ· καὶ τὸ ΒΔΓ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ Ζ χωρίου.

Φανερὸν δὲ [ὅτι] καί, εἴ κα τριπλάσιον ᾖ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ Ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ′.

Ἔστω πάλιν ζυγὸς ἁ ΑΓ γραμμά, μέσον δὲ αὐτᾶς ἔστω τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β [τὸ ΓΔΗ τρίγωνον],

1 εἴη κα Heiberg : εηκα DEGH assimilatur 𝔅 || 2 παρὰ τὸν ὁρίζοντα, αἱ Torellius : αὐτὸν ὁρίζονται DEGH ipsi orizonti 𝔅 || 3 κάθετοι 𝔅 : καθέτοις DEGH || 9 ἁ Torellius : ὁ DEGH || λυθῇ Heiberg : λυθείη DEGH || 11 κα κατασταθῇ Heiberg : κατασταθὲν DEGH statutum est 𝔅 || 14 γὰρ DEGH : οὖν 𝔅 || 16 ἰσορροπέοντι E : ἰσορροπέωντι DGH || 22 ὅτι codd. : del. Heiberg || 26 τὸ ΓΔΗ τρίγωνον codd. : del. Heiberg.

triangle obtusangle ayant pour base le segment de droite ΔH et une hauteur égale à la moitié du levier ; que le triangle ΔΓH soit suspendu aux points B et Γ, et que l'aire Z, suspendue au point A, fasse équilibre au triangle ΓΔH dans sa position actuelle. Nous démontrerons de la même manière que l'aire Z est équivalente à la troisième partie du triangle ΓΔH.

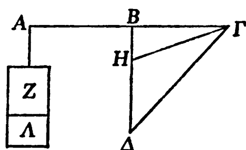


Fig. 65

Qu'une autre aire encore, en effet, qui soit la troisième partie du triangle BΓH, soit suspendue au point A. Le triangle BΔΓ fera, dès lors, équilibre[1] à la somme des aires Z et Λ. Dès lors, comme le triangle BΓH fait équilibre à l'aire Λ, que le triangle BΓΔ fait équilibre à l'aire qui est la somme de Z et de Λ, et que, enfin, cette somme de Z et de Λ est équivalente au tiers[2] du triangle BΓΔ, il est évident que le triangle ΓΔH est le triple de l'aire Z.

8.

Soit le levier ABΓ, B son milieu ; qu'il soit suspendu en B ; soit ΓΔE un triangle rectangle ayant l'angle droit en E ; qu'il soit suspendu au levier aux points Γ et E ; que l'aire Z soit suspendue au point A et fasse équilibre au triangle ΓΔE dans sa position actuelle ; que le rapport de AB à BE soit égal au rapport du

1. Du moment que, par hypothèse, Z et ΓΔH se font équilibre, et qu'il y a équilibre entre Λ et BHΓ (cf. prop. 6), on conclut : $B\Delta\Gamma = 3(Z+\Lambda)$.

2. Puisque $\Lambda = \frac{1}{3}\, B\Gamma H$.

τὸ δὲ ΓΔΗ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΗ, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, καὶ κρεμάσθω τὸ ΔΓΗ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάμενον κατὰ τὸ Α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ ΓΔΗ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται τὸ Ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ ΓΔΗ τριγώνου.

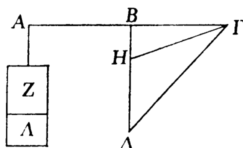


Fig. 65

Κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ Α τρίτον μέρος ἐὸν τοῦ ΒΓΗ τριγώνου· ἰσορροπήσει δὴ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΓΗ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ Λ, τὸ δὲ ΒΓΔ τῷ ΖΛ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΛ, φανερὸν ὅτι καὶ τὸ ΓΔΗ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ.

η'.

Ἔστω ζυγὸς ὁ ΑΒΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΕ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Ε γωνίαν, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΓΔΕ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔΕ τρίγωνον

5 τῷ GH : τὸ DE || 6 δὴ Heiberg : δὲ codd. || 8 τι DE𝔛 : τοι GH || 9 δὴ Heiberg : δὲ codd. || 11 Λ ms. 𝔛 : Α mss. DEGH || καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΛ mss. DEGH : om. 𝔛 || ΖΛ alt. ms. G : ΖΑ mss. DEH || 14 ΑΒΓ ms. 𝔛 : ΑΒ mss. DEGH || κρεμάσθω GH : κεκρεμάσθω DE𝔛 || 15 δὲ add. Heiberg || 16 τῷ Heiberg : τὰν DEGH.

triangle ΓΔE à l'aire K. Je dis que l'aire Z est inférieure au triangle ΓΔE, et supérieure à l'aire K.

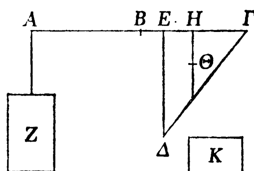


Fig. 66

Prenons le centre de gravité du triangle ΔEΓ, soit Θ ; menons la parallèle ΘH à ΔE. Du moment donc que le triangle ΓΔE fait équilibre à l'aire Z, le rapport de l'aire ΓΔE à l'aire Z est égal[1] au rapport de AB à BH, d'où il suit que l'aire Z est inférieure à l'aire ΓΔE. Et comme le triangle ΓΔE est à l'aire Z comme BA est à BH, et à l'aire K comme BA est à BE, il est évident que le rapport du triangle ΓΔE à l'aire K est supérieur au rapport de ΓΔE à l'aire Z ; par conséquent, l'aire Z est supérieure[2] à l'aire K.

9.

Soit de nouveau le levier AΓ, et B son milieu ; soit ΓΔK un triangle obtusangle ayant pour base ΔK et pour hauteur EΓ ; que ce triangle soit suspendu

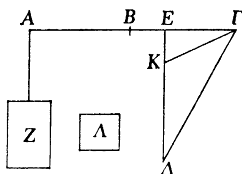


Fig. 67

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 6 et 7.
2. Cf. Eucl. V, 10.

ποτὶ τὸ Κ χωρίον. Φαμὶ δὴ τὸ Ζ χωρίον τοῦ μὲν ΓΔΕ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ Κ μεῖζον.

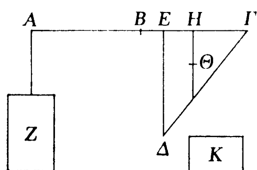


Fig. 66

Λελάφθω γὰρ τοῦ ΔΕΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἔστω τὸ Θ, καὶ ἁ ΘΗ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ Ζ χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ΓΔΕ χωρίον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσόν ἐστι τὸ Ζ τοῦ ΓΔΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ Ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΗ, ποτὶ δὲ τὸ Κ ὃν ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ, δῆλον ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Ζ τοῦ Κ.

θ′.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΚ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΚ, ὕψος δὲ τὰν ΕΓ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ

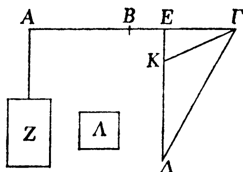


Fig. 67

8 ἔχει 𝓛 : ἔχον DEGH ‖ 15 κρεμάσθω Basil. : κεκρεμάσθω DEGH.

au levier aux points Γ et E ; que l'aire Z soit suspendue au point A et fasse équilibre au triangle ΔΓK dans sa position actuelle, et que le rapport de AB à BE soit égal au rapport du triangle ΓΔK à l'aire Λ. Je dis que l'aire Z est supérieure à l'aire Λ et inférieure à l'aire du triangle ΔΓK.

Même démonstration que pour la proposition précédente.

10.

Soit de nouveau le levier ABΓ, et B son milieu ; soit le trapèze BΔHK ayant les angles aux sommets B et H droits, et le côté KΔ orienté vers le point Γ ; que le rapport du trapèze BΔKH à l'aire Λ soit égal au rapport de AB à BH ; que le trapèze BΔHK soit suspendu au levier aux points B et H ; que l'aire Z soit suspendue au point A et fasse équilibre au trapèze BΔKH dans sa position actuelle. Je dis que l'aire Z est inférieure à l'aire Λ.

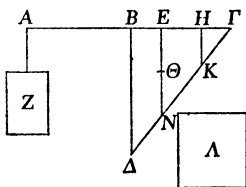


Fig. 68

Que le segment de droite AΓ soit en effet coupé au point E de manière que le rapport de EH à BE soit égal[1] au rapport de la somme du double de ΔB et de KH à la somme du double de KH et de BΔ ; que

1. Cf. Eucl. VI, 10.

τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΔΓΚ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔΚ τρίγωνον ποτὶ τὸ Λ. Φαμὶ δὴ τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ ΔΓΚ ἔλασσον.

Δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

ι′.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΒΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΒΔΗΚ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΚΔ πλευρὰν ἐπὶ τὸ Γ νεύουσαν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΒΔΚΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η σαμεῖα, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΒΔΚΗ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. Φαμὶ τὸ Ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ Λ.

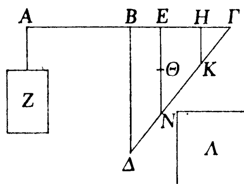


Fig. 68

Τετμάσθω γὰρ ἁ ΑΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως ὥστε, ὃν ἔχει λόγον ἁ διπλασία τᾶς ΔΒ καὶ ἁ ΚΗ ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ΚΗ καὶ τὰν ΒΔ, τοῦτον ἔχειν τὰν ΕΗ ποτὶ τὰν ΒΕ,

1 κρεμάσθω Basil. : κεκρεμάσθω DEGH ‖ 2 ΔΓΚ ms. 𝔏 : ΔΕΚ mss. DEGH ‖ 12 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH ‖ 13 τὰ Β, Η σαμεῖα 𝔏 : τῶν Β, Η σαμείων DEGH ‖ κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH ‖ 19 τὰν pr. Heiberg : τῆς codd. ‖ ἔχειν 𝔏 : ὃν ἔχει DEGH.

le segment EN de la droite menée par E parallèlement à BΔ soit divisé en deux parties égales par le point Θ ; dans le trapèze BΔHK, le centre de gravité est alors le point Θ, car cette propriété a été démontrée dans le Traité de mécanique[1]. Si donc le trapèze BΔHK est détaché des points B et H et suspendu au point E, il garde la même position, pour les mêmes raisons que dans ce qui précède, et fait équilibre à l'aire Z. Du moment donc que le trapèze BΔHK, suspendu en E, fait équilibre à l'aire Z, suspendue en A, le trapèze BΔHK sera à l'aire Z comme[2] AB est à BE. Le rapport du trapèze BΔHK à l'aire Z sera donc supérieur à son rapport à l'aire Λ, puisque le rapport de AB à BE est, lui aussi, supérieur[3] au rapport de AB à BH. Par conséquent, l'aire Z sera inférieure à l'aire Λ.

11.

Soit de nouveau le levier AΓ et B son milieu ; soit KΔTP un trapèze ayant les côtés KΔ et TP orientés vers le point Γ, et les côtés ΔP et KT perpendiculaires à BΓ ; que la droite ΔP passe par B ; que le rapport

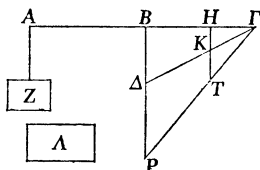


Fig. 69

de AB à BH soit égal au rapport du trapèze ΔKTP à l'aire Λ ; que le trapèze ΔKTP soit suspendu au

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 15.
2. Cf. *ibid.* I, 6 et 7.
3. Cf. Eucl. V, 8.

καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὰν ΒΔ ἀχθεῖσα ἁ ΕΝ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὴ ΒΔΗΚ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. Ἦν οὖν τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ μὲν τὸ Ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η σαμείων λυθῇ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ ἰσορροπεῖ τῷ Ζ χωρίῳ. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ τὸ Ε κρεμάμενον τῷ Ζ χωρίῳ κατὰ τὸ Α κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ ἤπερ ποτὶ τὸ Λ, ἐπεὶ καὶ ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ποτὶ τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ Ζ τοῦ Λ.

ια΄.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, τὰς δὲ ΔΡ, ΚΤ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, καὶ ἁ ΔΡ ἐπὶ τὸ Β πιπτέτω, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ

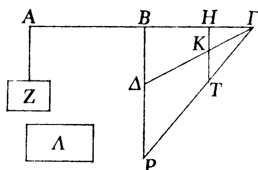


Fig. 69

ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, τὸ δὲ ΔΚΤΡ τραπέζιον κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ

5 λυθῇ Heiberg : λυθείη DEGH ‖ ἔχον GH : ἔχοντα DE ‖ 6 διὰ τὰ αὐτὰ Heiberg : δι' αὐτὰ DEGH propter hec 𝔏 ‖ ἰσορροπεῖ 𝔏 : ἰσορροπείτω DEGH ‖ 10 ἄρα add. Basil. ‖ ἔχει Basil. : ἔχον codd. ‖ 20 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH.

levier aux points B et H, que l'aire Z y soit suspendue au point A, et que l'aire Z fasse équilibre au trapèze ΔKPT dans sa position actuelle. On démontrerait comme dans les propositions précédentes que l'aire Z est inférieure à l'aire Λ.

12.

Soit de nouveau le levier AΓ, et B son milieu ; soit ΔEKH un trapèze ayant les angles de sommets E et H droits, et les côtés KΔ et EH orientés vers le point Γ ; que le rapport de AB à BH soit égal au rapport du trapèze ΔKEH à l'aire M, et que le rapport de AB à BE soit égal au rapport du trapèze ΔKEH à l'aire Λ ; que le trapèze ΔKEH soit suspendu au levier aux points E et H, que l'aire Z y soit suspendue au point A et fasse équilibre au trapèze dans sa position actuelle. Je dis que l'aire Z est supérieure à l'aire Λ et inférieure à l'aire M.

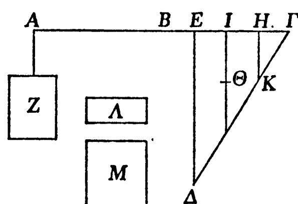


Fig. 70

J'ai pris, en effet, le centre de gravité du trapèze ΔKEH, soit Θ ; ce centre est pris de la même manière que dans la proposition précédente ; je mène la parallèle ΘI à ΔE. Si, dès lors, le trapèze est suspendu au levier au point I et détaché des points E et H, il restera

Β, Η καὶ τὸ Ζ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ Ζ τῷ ΔΚΡΤ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ Ζ χωρίον τοῦ Λ.

ιβ′.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΔΕΚΗ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ε, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ ΚΔ, ΕΗ γραμμὰς ποτὶ τὸ Γ νευούσας, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. Φαμὶ δὴ τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

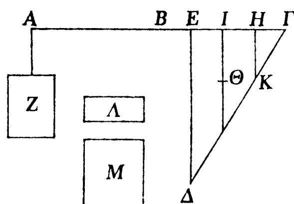


Fig. 70

Ἔλαβον γὰρ τοῦ ΔΚΕΗ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἔστω δὲ τὸ Θ · λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον · καὶ ἄγω τὰν ΘΙ παρὰ τὰν ΔΕ. Ἂν οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθῇ κατὰ τὸ Ι, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Η λυθῇ,

1 τὸ alt. Ζ mss. EG𝔛 : τῷ Ζ mss. DH ‖ 7 σαμείοις DEGH : om. 𝔛 ‖ 11 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH ‖ 13 κρεμάσθω Heiberg : ἐκκρεμάσθω DEGH ‖ 19 κρεμασθῇ Heiberg : κρεμασθήσεται DEGH.

dans la même position et fera équilibre à l'aire Z pour les mêmes raisons que dans les propositions précédentes[1]. Mais du moment que le trapèze, suspendu au point I, fait équilibre à l'aire Z suspendue au point A, le rapport du trapèze à l'aire Z sera égal au rapport de AB à BI ; il est donc évident que le rapport de ΔKEH à l'aire Λ est supérieur[2] au rapport de ΔKEH à l'aire Z, et que le rapport de ΔKEH à l'aire M est inférieur[2] au rapport de ΔKEH à l'aire Z ; l'aire Z est, par conséquent, supérieure à l'aire Λ, et inférieure à l'aire M.

13.

Soit de nouveau le levier AΓ, et B son milieu ; soit KΔTP un trapèze tel que ses côtés KΔ et TP soient orientés vers le point Γ, et ses côtés ΔT et KP perpendiculaires à BΓ ; qu'il soit suspendu au levier aux points E et H ; que l'aire Z y soit suspendue au point A et fasse équilibre au trapèze ΔKTP dans

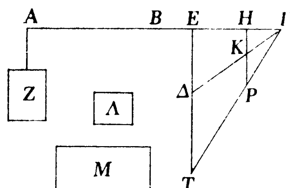


Fig. 71

sa position actuelle ; que le rapport de AB à BE soit égal au rapport du trapèze ΔKTP à l'aire Λ, et le rapport de AB à BH égal au rapport du même trapèze à l'aire M. On démontrerait comme précédemment que l'aire Z est supérieure à l'aire Λ, et inférieure à l'aire M.

1. Cf. prop. 6.
2. Cf. Eucl. V, 8.

μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν καὶ ἰσορροπήσει τῷ Ζ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ Ι τῷ Ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ Α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΙ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ ΔΚΕΗ ποτὶ μὲν τὸ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ποτὶ τὸ Ζ, ποτὶ δὲ τὸ Μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζόν ἐστι, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

ιγ΄.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον, ὥστε τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ Γ, τὰς δὲ ΔΤ, ΚΡ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, κρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΔΚΤΡ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται, καὶ ὃν μὲν

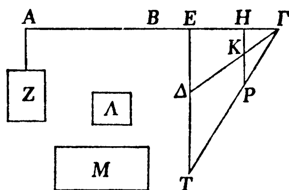


Fig. 71

λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ χωρίον, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ. Ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

1 τῷ G : τᾷ DEH ‖ 6 Λ ms. ℒ : Α mss. DEGH ‖ 13 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH ‖ Η mss. Gℒ : om. DEH ‖ 14 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH.

14.

Soit le segment ΒΘΓ compris entre une droite et une parabole. Supposons d'abord ΒΓ perpendiculaire au diamètre. Menons du point Β la parallèle ΒΔ au diamètre, et du point Γ la droite ΓΔ, tangente à la parabole au point Γ ; le triangle ΒΓΔ sera donc rectangle[1]. Divisons le segment de droite ΒΓ en autant de segments partiels égaux qu'on voudra, soit ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ. Par les points de division menons les parallèles ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ au diamètre, joignons les points d'intersection de ces parallèles avec la parabole au point Γ, et prolongeons les droites de jonction. Je dis que le triangle ΒΔΓ est inférieur au triple de la somme des trapèzes ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ et du triangle ΞΙΓ, et supérieur au triple de la somme des trapèzes ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ et du triangle ΙΟΓ.

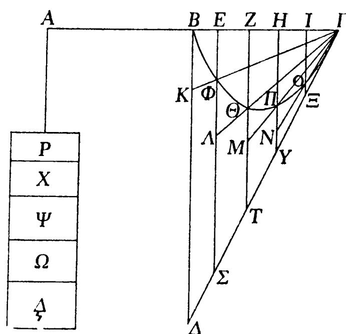


Fig. 72

1. Cf. Eucl. I, 29.

ιδ′.

Ἔστω τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. Ἔστω δὴ πρῶτον ἁ ΒΓ ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Β σαμείου ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ· ἐσσεῖται δὴ τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ὀρθογώνιον. Διῃρήσθω δὴ ἁ ΒΓ ἐς ἴσα τμάματα ὁποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, καὶ ἀπὸ τᾶν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. Φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΒΔΓ τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΙΟΓ τριγώνου μεῖζον [ἐστιν] ἢ τριπλάσιον.

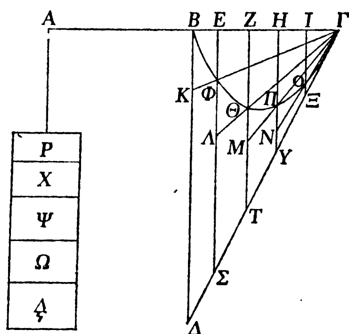


Fig. 72

7 ἴσα Nizzius : τὰ codd. ‖ 8 ΙΓ add. Nizzius ‖ τᾶν τομᾶν Torellius : τᾶς τομᾶς codd. ‖ 11 ἐπὶ Heiberg : κατὰ codd. ‖ 15 ἐστιν DEGH : esse ꭓ del. Heiberg.

Menons en effet la droite ABΓ et prenons sur elle le segment AB égal au segment BΓ. Imaginons que AΓ soit un levier, dont le milieu sera le point B ; que ce levier soit suspendu au point B. Suspendons au levier aussi le triangle BΔΓ aux points B et Γ, et à l'autre partie du levier, au point A, les aires P, X, Ψ, Ω, Δ_s. Que l'aire P fasse équilibre au trapèze ΔE dans la position qu'il occupe, l'aire X au trapèze ZΣ, l'aire Ψ au trapèze TH, l'aire Ω au trapèze ΥI et, enfin, l'aire Δ_s au triangle ΞIΓ ; dès lors, la somme (sc. des aires, d'un côté de B) fera équilibre à la somme (sc. des trapèzes, de l'autre côté de B), de façon que l'aire du triangle BΔΓ sera triple[1] de la somme des aires P, X, Ψ, Ω, Δ_s. Puisque, en outre, BΓΘ est un segment compris entre une droite et une parabole, que la droite BΔ est menée du point B parallèlement au diamètre, que la droite ΓΔ a été menée du point Γ comme tangente à la parabole au point Γ, et qu'une autre droite, ΣE, est menée parallèlement au diamètre, le rapport de BΓ à BE est égal[2] au rapport de ΣE à EΦ. Il s'ensuit que le rapport de BA à BE est aussi égal[3] au rapport du trapèze ΔE au trapèze KE. On démontrera de la même manière que le rapport de AB à BZ est égal au rapport du trapèze ΣZ au trapèze ΛZ, que le rapport de AB à BH est égal au rapport du trapèze TH au trapèze MH, et que le rapport de AB à BI est égal au rapport du trapèze ΥI au trapèze NI. Comme on a donc le trapèze ΔE, ayant ses angles aux sommets B et E droits et les côtés orientés vers le point Γ, qu'une certaine aire P, suspendue au levier au point A, fait équilibre à ce trapèze dans sa position actuelle, et que le trapèze ΔE est au trapèze KE comme BA est

1. Cf. prop. 6.
2. Cf. prop. 5.
3. Puisque $BA = B\Gamma$ et $\frac{\Delta E}{KE} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$.

Διάχθω γὰρ εὐθεῖα ἁ ΑΒΓ, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΑΒ ἴσα τᾷ ΒΓ, καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ ΑΓ· μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ Β· καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Β, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΒΔΓ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Γ, ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθω τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, $\underset{\varsigma}{\Delta}$ χωρία κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν Ρ χωρίον τῷ ΔΕ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ $\underset{\varsigma}{\Delta}$ τῷ ΞΙΓ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ ΡΧΨΩ$\underset{\varsigma}{\Delta}$ χωρίου. Καὶ ἐπεί ἐστιν τμᾶμα τὸ ΒΓΘ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται ἁ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἆκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΣΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΕ, ὃν ἁ ΣΕ ποτὶ τὰν ΕΦ· ὥστε καὶ ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΖ τὸν αὐτὸν ἔχουσα λόγον, ὃν τὸ ΣΖ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΛΖ, ποτὶ δὲ τὰν ΒΗ, ὃν τὸ ΤΗ ποτὶ τὸ ΜΗ, ποτὶ δὲ τὰν ΒΙ, ὃν τὸ ΥΙ ποτὶ τὸ ΝΙ. Ἐπεὶ οὖν ἐστι τραπέζιον τὸ ΔΕ τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Ε σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ Ρ κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν ὡς ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ, μεῖζον ἄρα

3 κρεμάσθω pr. D : κεκρεμάσθω EGH ‖ κρεμάσθω alt. Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH ‖ 5 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH ‖ $\underset{\varsigma}{\Delta}$ Heiberg : Δ codd. ‖ 8 $\underset{\varsigma}{\Delta}$ Heiberg : Δ codd. ‖ ΞΙΓ mss. G𝓛 : ΖΙΓ mss. DEH ‖ 9 καὶ DEGH : om. 𝓛 ‖ 10 ΡΧΨΩ$\underset{\varsigma}{\Delta}$ Heiberg : ΡΧΨΩΔ codd. ‖ 19 ἔχουσα G : ἔχοντι DEH habere 𝓛 ‖ ΛΖ ms. 𝓛 : ΑΖ mss. DEGH ‖ 20 ΒΙ ms. 𝓛 : ΒΗ mss. DEGH ‖ 23 τὸ alt. EH : τῷ DG.

à BE, l'aire KE est supérieure à l'aire P ; car cela a été démontré[1]. D'autre part, on a aussi le trapèze ZΣ, ayant les angles aux sommets Z et E droits et le côté ΣT orienté vers le point Γ ; l'aire X, suspendue au levier au point A, lui fait équilibre dans sa position actuelle ; enfin, le trapèze ZΣ est au trapèze ZΦ comme AB est à BE, et le trapèze ZΣ est au trapèze ΛZ comme AB est à BZ ; il s'ensuit que l'aire X sera inférieure au trapèze ΛZ et supérieure au trapèze ZΦ ; car cette propriété a été démontrée elle aussi. Pour les mêmes raisons, l'aire Ψ sera inférieure au trapèze MH et supérieure au trapèze ΘH, l'aire Ω inférieure au trapèze NOIH et supérieure au trapèze ΠI, l'aire $\overset{\Delta}{\varsigma}$ inférieure au triangle ΞIΓ et supérieure au triangle ΓIO. Du moment donc que le trapèze KE est supérieur à l'aire P, le trapèze ΛZ supérieur à l'aire X, le trapèze MH supérieur à l'aire Ψ, le trapèze NI supérieur à l'aire Ω, et que le triangle ΞIΓ est supérieur à l'aire $\overset{\Delta}{\varsigma}$, il est manifeste que la somme des aires indiquées est supérieure à la somme des aires P, X, Ψ, Ω et $\overset{\Delta}{\varsigma}$. Mais cette dernière somme est équivalente à la troisième partie du triangle BΓΔ. Il est donc évident que le triangle BΓΔ est inférieur à la triple somme des trapèzes KE, ΛZ, MH, NI et du triangle ΞIΓ. Puisque, d'autre part, le trapèze ZΦ est inférieur à l'aire X, le trapèze ΘH inférieur à l'aire Ψ, le trapèze IΠ inférieur à l'aire Ω, et que le triangle IOΓ est inférieur à l'aire $\overset{\Delta}{\varsigma}$, il est manifeste que la somme des aires indiquées est elle aussi inférieure à la somme des aires $\overset{\Delta}{\varsigma}$, Ω, Ψ, X. Il est donc évident que le triangle BΔΓ est aussi supérieur[2] au triple de la somme des trapèzes

1. Cf. prop. 10.
2. Puisque $B\Delta\Gamma > 3(\overset{\Delta}{\varsigma}+\Omega+\Psi+X)$.

ἐστὶν τὸ ΚΕ χωρίον τοῦ Ρ χωρίου : δέδεικται γὰρ τοῦτο. Πάλιν δὲ καὶ τὸ ΖΣ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ζ, Ε γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΣΤ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ Χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΖΦ, ὡς δὲ ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΖ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΛΖ · εἴη οὖν κα τὸ Χ χωρίον τοῦ μὲν ΛΖ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΖΦ μεῖζον · δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Ψ χωρίον τοῦ μὲν ΜΗ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΘΗ μεῖζον, καὶ τὸ Ω χωρίον τοῦ μὲν ΝΟΙΗ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΠΙ μεῖζον, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ $\underset{s}{\Delta}$ χωρίον τοῦ μὲν ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΓΙΟ μεῖζον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΚΕ τραπέζιον μεῖζόν ἐστι τοῦ Ρ χωρίου, τὸ δὲ ΛΖ τοῦ Χ, τὸ δὲ ΜΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΝΙ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΞΙΓ τρίγωνον τοῦ $\underset{s}{\Delta}$, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονά ἐστι τοῦ ΡΧΨΩ$\underset{s}{\Delta}$ χωρίου. Ἔστιν δὲ τὸ ΡΧΨΩ$\underset{s}{\Delta}$ τρίτον μέρος τοῦ ΒΓΔ τριγώνου · δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ τραπεζίων καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ μὲν ΖΦ τραπέζιον ἔλασσόν ἐστι τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΘΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΙΠ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΙΟΓ τρίγωνον τοῦ $\underset{s}{\Delta}$, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ $\underset{s}{\Delta}$ΩΨΧ χωρίου · φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον

3 ἔχον G : ἔχων DEH ‖ 5 ἔχοντος τοῦ τραπεζίου 𝔛 : ἔχοντι τῷ τραπεζίῳ DEGH ‖ 8 οὖν κα Heiberg : ἂν καὶ codd. ‖ 12 ΝΟΙΗ mss. DEGH : ni ms. 𝔛 ‖ δὲ Heiberg : δὴ codd. ‖ 13 $\underset{\varsigma}{\Delta}$ Heiberg : Δ codd. ‖ 16 $\underset{\varsigma}{\Delta}$ Heiberg : Δ codd. ‖ 17 ΡΧΨΩ$\underset{\varsigma}{\Delta}$ Heiberg : ΡΧΨΩΔ codd. ‖ 18 ΡΧΨΩ$\underset{\varsigma}{\Delta}$ Heiberg : ΡΧΨΩΔ codd. ‖ ΒΓΔ Nizzius : ΑΓΔ mss. DEGH, b d g ms. 𝔛 ‖ 23 $\underset{\varsigma}{\Delta}$ Heiberg : Δ codd. ‖ 24 $\underset{\varsigma}{\Delta}$ΩΨΧ ms. D : ΔΩΨΧ mss. EG𝔛, ΘΩΨΧ ms. H.

ΦZ, ΘH, IΠ et du triangle IΓO, et qu'il est inférieur à la triple somme des aires décrites auparavant.

15.

Soit de nouveau le segment BΘΓ compris entre une droite et une parabole ; mais que BΓ ne soit pas perpendiculaire au diamètre ; nécessairement donc ou bien la parallèle au diamètre menée du point B du côté du segment, ou bien la parallèle menée du point Γ, fait un angle obtus avec BΓ. Que ce soit la droite issue de B qui fait l'angle obtus ; menons de B la parallèle BΔ au diamètre, et de Γ la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ ; divisons BΓ en un nombre quelconque de segments égaux, soit BE, EZ, ZH, HI, IΓ, menons des points E, Z, H, I parallèlement au diamètre les droites EΣ, ZT, HΥ, IΞ, joignons leurs points d'intersection avec la parabole au point Γ, et prolongeons les droites de jonction. Je dis que, dans ce cas encore, le triangle BΔΓ est inférieur à la triple somme des trapèzes BΦ, ΛZ, MH, NI et du triangle ΓIΞ et supérieur à la triple somme des trapèzes ZΦ, HΘ, IΠ et du triangle ΓOI.

Prolongeons ΔB de l'autre côté (sc. au-delà du segment). J'abaisse la perpendiculaire ΓK et je prends le segment AK égal à ΓK. Imaginons encore que AΓ soit un levier, K son milieu, et que AΓ soit suspendu au point K ; suspendons aussi le triangle ΓKΔ, dans sa position actuelle, à la moitié du levier, aux points Γ et K, et suspendons à l'autre moitié du levier, au point A, les aires P, X, Ψ, Ω, $\underset{\varsigma}{\Delta}$; que l'aire P fasse

τῶν ΦΖ, ΘΗ, ΙΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΙΓΟ τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

ιε′.

Ἔστω πάλιν τὸ ΒΘΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ ΒΓ μὴ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ· ἀναγκαῖον δὴ ἤτοι τὰν ἀπὸ τοῦ Β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ τμάματι ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ Γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν ΒΓ. Ἔστω ἁ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ ποτὶ τῷ Β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ Β ἁ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, καὶ διηρήσθω ἁ ΒΓ εἰς τμάματα ἴσα ὁποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Ζ, Η, Ι παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. Φαμὶ δὴ καὶ νῦν τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΒΦ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΓΙΞ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΓΟΙ τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον.

Ἐκβεβλήσθω ἁ ΔΒ ἐπὶ θάτερα. Ἀγαγὼν οὖν κάθετον τὰν ΓΚ τᾷ ΓΚ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ΑΚ. Νοείσθω δὴ πάλιν ζύγιον τὸ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Κ, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΓΚΔ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Κ ἔχον ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἐκ τοῦ θατέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν κατὰ τὸ Α τὰ Ρ,

6 δὴ Heiberg : δὲ codd. ‖ 7 ἀγμέναν GB : ἀγμένων DEH ‖ αὐτὰ G𝔏 : om. DEH ‖ 9 ποτὶ τῷ DEH𝔏 : πρὸς τὸ G ‖ 12 τὰ Heiberg : τᾶν DEGH om. 𝔏 ‖ 15 ἃ G : ὁ DEH ubi 𝔏 ‖ ἐπεζεύχθωσαν G : ἐπιζεύχθωσαν DEH ‖ 17 τῶν μὲν EGH : τῷ μὲν D ‖ ΜΗ, ΝΙ ms. 𝔏 : ΘΗ, ΠΙ mss. DEGH ‖ 20 οὖν add. Heiberg ‖ 23 κρεμάσθω Heiberg : κεκρεμάσθω DEGH ‖ 24 καὶ add. Heiberg ‖ 25 τὰ G : τῶν DEH.

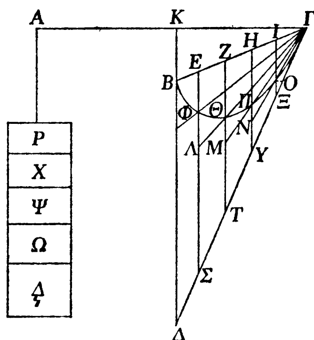


Fig. 73

équilibre au trapèze ΔE dans sa position actuelle, l'aire X au trapèze ΖΣ, l'aire Ψ au trapèze TH, l'aire Ω au trapèze ΥΙ, et l'aire $\underset{\varsigma}{\Delta}$ au triangle ΓΙΞ ; la somme des aires (sc. d'un côté) fera donc équilibre à la somme des aires (sc. de l'autre côté) ; il s'ensuit que le triangle ΔΒΓ est équivalent[1] à la triple somme des aires P, X, Ψ, Ω, $\underset{\varsigma}{\Delta}$. Nous démontrerons de la même manière que dans la proposition précédente[2] que le trapèze ΒΦ est supérieur à l'aire P, que l'aire X est comprise entre les (sc. aires des) trapèzes ΖΦ et ΘΕ, l'aire Ψ comprise entre les trapèzes ΗΘ et ΜΗ, l'aire Ω comprise entre les trapèzes ΠΙ et ΝΙ, et que l'aire $\underset{\varsigma}{\Delta}$ est comprise entre le triangle ΓΙΟ et le triangle ΞΙΓ[3] ; la proposition est donc démontrée.

16.

Soit de nouveau le segment ΒΘΓ compris entre une droite et une parabole. Menons par le point B

1. Cf. prop. 7.
2. Cf. prop. 14.
3. On a ainsi les inégalités : $B\Phi > P$; $Z\Phi < X < \Theta E$; $H\Theta < \Psi < MH$; $\Pi I < \Omega < NI$; $\Gamma IO < \underset{\varsigma}{\Delta} < \Xi I\Gamma$.

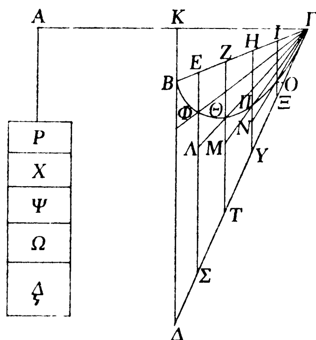


Fig. 73

Χ, Ψ, Ω, $\underset{s}{\Delta}$ χωρία, καὶ τὸ μὲν Ρ τῷ ΔΕ τραπεζίῳ ἰσορροπείτω οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ $\underset{s}{\Delta}$ τῷ ΓΙΞ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ΡΧΨΩ$\underset{s}{\Delta}$ χωρίου. Ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τό τε ΒΦ τραπέζιον τοῦ Ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μὲν ΘΕ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΖΦ ἔλαττον, καὶ τὸ μὲν ΜΗ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Ψ χωρίου, τὸ δὲ ΗΘ ἔλασσον, καὶ ἔτι τὸ μὲν ΝΙ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Ω χωρίου, τὸ δὲ ΠΙ ἔλασσον, καὶ τὸ μὲν ΞΙΓ τρίγωνον μεῖζον τοῦ $\underset{s}{\Delta}$ χωρίου, τὸ δὲ ΓΙΟ ἔλασσον· δῆλον οὖν ἐστιν.

ιϛ′.

Ἔστω πάλιν τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ Β

1 $\underset{ς}{\Delta}$ ms. G : Δ mss. DEH𝔏 || τὸ EGH : τῷ D || 3 τὸ sec. EG : τῷ DH || $\underset{ς}{\Delta}$ mss. DG : Δ mss. E𝔏, Θ ms. H || 4 δὴ 𝔏 : δὲ DEGH || 5 ΡΧΨΩ$\underset{ς}{\Delta}$ Heiberg : ΟΧΨΩ$\underset{ς}{\Delta}$ mss. DEGH, r q ψ ω d ms. 𝔏 || 7 Ρ ms. 𝔏 : ΡΧ mss. DEGH || 11 $\underset{ς}{\Delta}$ ms. G : Δ mss. DEH𝔏.

la parallèle ΒΔ au diamètre, et du point Γ la droite ΓΔ, tangente à la parabole au point Γ. Soit l'aire Z équivalente à la troisième partie du triangle ΒΔΓ. Je dis que le segment ΒΘΓ est équivalent à l'aire Z.

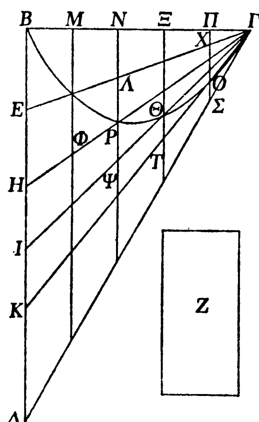


Fig. 74

En effet, s'il n'est pas équivalent, il est ou bien plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord, si possible, plus grand. L'excès du segment ΒΘΓ sur l'aire Z, ajouté à lui-même (sc. un nombre suffisant de fois), sera donc supérieur au triangle ΒΓΔ. Mais il est possible de se donner une aire, inférieure à cet excès, qui soit une partie du triangle ΒΔΓ. Soit donc le triangle ΒΓΕ ; qu'il soit inférieur à l'excès en question, et qu'il soit une partie du triangle ΒΔΓ ; le segment de droite ΒΕ sera alors la même partie[1] du segment de droite ΒΔ. Divisons donc ce segment en parties (sc. égales à ΒΕ), et soit H, I, K les points de division ; menons les droites joignant les points H, I, K au point Γ. Ces

1. Cf. Eucl. VI, 1.

ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου τρίτον μέρος τῷ Ζ χωρίον. Φαμὶ δὴ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ Ζ χωρίῳ.

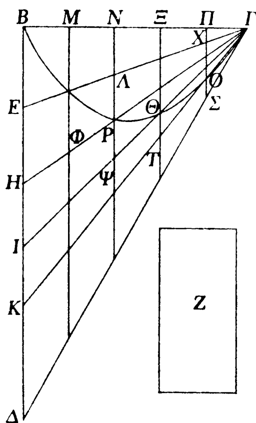


Fig. 74

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. Ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον· ἁ δὴ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ ΒΓΔ τριγώνου. Δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. Ἔστω δὴ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ ΒΕ μέρος τᾶς ΒΔ. Διῃρήσθω οὖν ἁ ΒΔ ἐς τὰ μέρεα, καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρέσιων σαμεῖα τὰ Η, Ι, Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ι, Κ σαμείων

6 δὴ alt. add. Heiberg || 7 ΒΘΓ ms. ℒ : ΒΓΔ mss. DEGH || 10 δὴ Heiberg : δὲ codd. || 12 τὸ αὐτὸ DEGH : om. ℒ.

droites coupent la parabole, puisque ΓΔ est la tangente à la parabole au point Γ. Par les points où ces droites coupent la parabole menons les droites ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ parallèlement au diamètre ; elles seront aussi parallèles[1] à ΒΔ. Puisque maintenant le triangle ΒΓΕ est inférieur à l'excès du segment ΒΘΓ sur l'aire Ζ, il est évident que la somme de l'aire Ζ et du triangle ΒΓΕ est inférieure au segment. De plus, la somme des trapèzes ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ et du triangle ΓΟΣ, à travers lesquels la parabole passe, est équivalente au triangle ΒΓΕ ; le trapèze ΜΕ est en effet commun, le trapèze ΜΛ est équivalent au trapèze ΦΛ, le trapèze ΛΞ au trapèze ΘΡ, le trapèze ΧΞ au trapèze ΟΘ, et le triangle ΓΧΠ au triangle ΓΟΣ ; l'aire Ζ sera donc inférieure à la somme des trapèzes ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ et du triangle ΠΟΓ. Or le triangle ΒΔΓ est équivalent au triple de l'aire Ζ. Il s'ensuit que le triangle ΒΔΓ est inférieur à la triple somme des trapèzes ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ et du triangle ΠΟΓ, ce qui est impossible du moment qu'on a démontré[2] qu'il est supérieur au triple (sc. de cette somme). Le segment ΒΘΓ n'est donc pas supérieur à l'aire Ζ.

Je dis qu'il ne lui est pas, non plus, inférieur. Qu'il soit en effet, si possible, inférieur à Ζ. De nouveau donc l'excès de l'aire Ζ sur le segment ΒΘΓ, ajouté (sc. un nombre suffisant de fois) à lui-même, dépassera[3] aussi le triangle ΒΔΓ. Mais il est possible de se donner une aire inférieure à cet excès et qui soit une partie du triangle ΒΔΓ. Que le triangle ΒΓΕ soit inférieur à cet excès et qu'il soit une partie du triangle ΒΔΓ ; répétons les constructions de la première partie de cette proposition. Puisque, dans ces conditions, le triangle ΒΓΕ est inférieur à l'excès de l'aire Ζ sur

1. Cf. Eucl. I, 30.
2. Cf. prop. 14 et 15.
3. Cf. l'Introd. à Dosithée, milieu.

ἐπὶ τὸ Γ εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν· τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ Γ· καὶ διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν τομὰν αἱ εὐθεῖαι, ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, δῆλον ὡς τὰ συναμφότερα τό τε Ζ χωρίον καὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμάματος. Καὶ τῷ ΒΓΕ τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐντι, δι' ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ ΓΟΣ τρίγωνον· τὸ μὲν γὰρ ΜΕ τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ ΜΛ ἴσον τῷ ΦΛ καὶ τὸ ΛΞ ἴσον τῷ ΘΡ καὶ τὸ ΧΞ ἴσον τῷ ΟΘ καὶ τὸ ΓΧΠ τρίγωνον τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ· τὸ δὴ Ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου. Καί ἐστι τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ χωρίου· τὸ δὲ ΒΔΓ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν ἢ τριπλάσιον. Οὐκοῦν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Πάλιν ἄρα ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμάματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. Δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. Ἔστω οὖν τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς

1 ἐπὶ τὸ Γ Heiberg : ἐπὶ τὰ ΓΕ mss. DEGH apud g ms. 𝔅 ‖ εὐθεῖαι G : εὐθεῖα DEH ‖ 3 καθ' ἃ Heiberg : om. DEGH ubi 𝔅 ‖ 5 ΠΟ Torellius : ΠΣ codd. ‖ 7 ΒΘΓ ms. 𝔅 : ΒΘΙ mss. DEGH ‖ 11 ΘΡ, ΘΟ mss. DEGH : rt ts ms. 𝔅 ‖ 13 ΟΘ mss. DEGH : ts ms. 𝔅 ‖ 22 ἄρα add. Heiberg.

le segment ΒΘΓ, la somme du triangle ΒΕΓ et du segment ΒΘΓ est inférieure à l'aire Ζ. Mais l'aire Ζ est aussi inférieure à la somme des quadrilatères ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ et du triangle ΓΠΣ ; car le triangle ΒΔΓ est équivalent au triple de l'aire Ζ, et il est inférieur à la triple somme des aires indiquées, comme nous l'avons démontré dans la proposition précédente[1]. Il s'ensuit que la somme du triangle ΒΓΕ et du segment ΒΘΓ est inférieure à la somme des quadrilatères ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ et du triangle ΓΠΣ. Par conséquent, si on retranche de part et d'autre le segment, le triangle ΓΒΕ serait lui aussi inférieur à la somme des aires restantes, ce qui est impossible du moment qu'on a démontré que le triangle ΒΕΓ est équivalent à la somme des trapèzes ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ et du triangle ΓΟΣ, et que cette somme est supérieure à la somme des aires restantes.

Le segment ΒΘΓ n'est donc pas inférieur à l'aire Ζ ; mais on a démontré qu'il ne lui est pas non plus supérieur. Le segment est donc équivalent à l'aire Ζ.

17.

Cette propriété démontrée, il est évident que tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base que le segment et même hauteur.

Soit, en effet, un segment compris entre une droite et une parabole ; soit Θ son sommet ; inscrivons dans ce segment le triangle ΒΘΓ ayant même base que le segment et une hauteur égale (sc. à celle du segment). Puisque Θ est le sommet du segment[2], la droite menée de Θ parallèlement au diamètre coupe ΒΓ en deux parties égales, et ΒΓ est parallèle à la tangente au segment au point Θ[3]. Menons la parallèle ΕΘ au dia-

1. Plutôt dans les deux propositions 14 et 15, dans le texte actuel.

2. Cf. la définition du sommet, de la base, et de la hauteur du segment de parabole, et plus généralement d'un segment compris entre une droite et une courbe, à la fin de cette prop. 17.

3. Cf. prop. 1.

ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμάματος, τὸ ΒΕΓ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἀμφότερα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Ζ. Ἔστιν δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου· ἔστιν γὰρ τὸ ΒΔΓ τοῦ μὲν Ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη· ἔλασσον ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου. Ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμάματος ἔλασσον εἴη κα καὶ τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῶν περιλειπομένων χωρίων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ ΒΕΓ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ καὶ τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ, ἅ ἐντι μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. Οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἴσον ἄρα τὸ τμᾶμα τῷ Ζ χωρίῳ.

ιζ'.

Τούτου δεδειγμένου φανερὸν ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον.

Ἔστω γὰρ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΒΘΓ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ Θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ Θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν ΒΓ, καὶ ἁ ΒΓ ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ. Ἄχθω δὲ ἁ ΕΘ παρὰ τὰν διάμετρον, ἄχθω

10 κα Heiberg : ἂν G om. DEH𝔛 ‖ 12 ΘΡ mss. DEGH rt ms. 𝔛 ‖ 18 τούτου DEGH : hoc autem 𝔛.

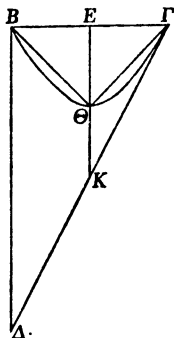


Fig. 75

mètre ; menons, de plus, du point B la parallèle BΔ au diamètre, et du point Γ la tangente ΓΔ à la parabole au point Γ. Dès lors, puisque KΘ est parallèle au diamètre, que ΓΔ est tangent à la parabole au point Γ, et que EΓ est parallèle à la tangente à la parabole au point Θ, le triangle BΔΓ est équivalent[1] au quadruple du triangle BΘΓ. Mais du moment que le triangle BΔΓ est équivalent[2] au triple du segment BΘΓ et au quadruple du triangle BΘΓ, il est évident que le segment BΘΓ est équivalent aux quatre tiers du triangle BΘΓ.

Dans les segments compris entre une droite et une ligne courbe, j'appelle base la droite (sc. limitant le segment), hauteur la plus grande perpendiculaire abaissée (sc. d'un point) de la ligne courbe sur la base du segment, sommet le point duquel la plus grande perpendiculaire est abaissée.

18.

Si dans un segment compris entre une droite et une parabole on mène du milieu de la base une parallèle

1. Cf. Eucl. VI, 4.
2. Cf. prop. 16.

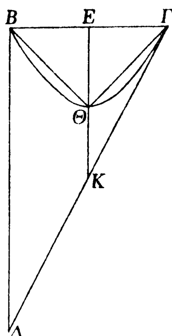


Fig. 75

δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ. Ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν ΚΘ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, ἁ δὲ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἁ δὲ ΕΓ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΒΘΓ τριγώνου. Ἐπεὶ δὲ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ μὲν ΒΘΓ τμάματος τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ ΒΘΓ τριγώνου τετραπλάσιον, δῆλον ὡς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ ΒΘΓ τριγώνου.

Τῶν τμαμάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς βάσιν μὲν καλέω τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ᾽ οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

ιη′.

Εἴ κα ἐν τμάματι, ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθῇ εὐθεῖα

9 τμᾶμα 𝔛 : om. DEGH ‖ ΒΘΓ alt. ms. 𝔛 : ΒΔΓ mss. DEGH ‖ 13 ἀγομέναν G𝔛 : ἀπτομέναν DEH.

au diamètre, le sommet du segment sera le point où la parallèle menée au diamètre coupe la section conique[1].

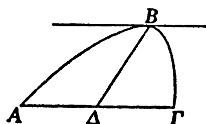


Fig. 76

Soit, en effet, ΑΒΓ un segment compris entre une droite et une parabole. Menons du milieu de ΑΓ la parallèle ΔΒ au diamètre. Du moment donc que ΒΔ est mené parallèlement au diamètre dans une parabole, et que les segments ΑΔ et ΔΓ sont égaux, il est évident que ΑΓ et la tangente à la conique au point B sont parallèles[2]. Il est donc manifeste que de toutes les perpendiculaires abaissées de (sc. points situés sur) la conique sur ΑΓ la plus grande sera celle qui est abaissée du point B ; le point B est donc le sommet du segment.

19.

Dans un segment compris entre une droite et une parabole la droite menée du milieu de la base (sc. parallèlement au diamètre) a une longueur égale aux quatre tiers de celle de la droite menée (sc. parallèlement au diamètre) du milieu de la moitié de la base.

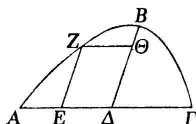


Fig. 77

1. Cf. Apollonius, I, déf. 4.
2. Cf. prop. 1.

παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν.

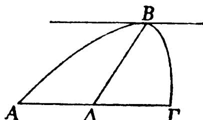


Fig. 76

Ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ ἄχθω ἁ ΔΒ παρὰ τὰν διάμετρον. Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ ΒΔ ἆκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΑΔ, ΔΓ, δῆλον ὡς παράλληλοί ἐντι ἅ τε ΑΓ καὶ ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. Φανερὸν οὖν ὅτι τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγομενᾶν καθέτων μεγίστα ἐσσεῖται ἁ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένα· κορυφὰ οὖν ἐστιν τοῦ τμάματος τὸ Β σαμεῖον.

ιθ'.

Ἐν τμάματι περιεχομένῳ ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἁ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθεῖσα τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσσεῖται μάκει.

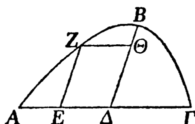


Fig. 77

7 κώνου add. Torellius ‖ 8 παράλληλοί G : παράλληλός DEHℒ ‖ 10 τᾶν add. Torellius ‖ ἀγομενᾶν ℒ : ἀγομένας DEGH ‖ καθέτων Heiberg : κάθετος codd. ‖ 14 ἐν τμάματι περιεχομένῳ ℒ : εἴ κα τμῆμα περιεχόμενον DEGH.

Soit ΑΒΓ un segment compris entre une droite et une parabole ; menons du milieu de ΑΓ la parallèle ΒΔ au diamètre, et du milieu de ΑΔ la parallèle ΕΖ ; menons, de plus, la parallèle ΖΘ à ΑΓ. Du moment donc que dans une parabole ΒΔ est mené parallèlement au diamètre, et que les droites ΑΔ et ΖΘ sont parallèles à la tangente en Β, il est évident que le rapport de ΒΔ à ΒΘ est égal[1] au rapport du carré sur ΑΔ au carré sur ΖΘ ; il s'ensuit que le segment de droite ΒΔ a une longueur quadruple[2] de celle de ΒΘ. Il est donc évident que la longueur de ΒΔ est égale aux quatre tiers de celle de ΕΖ.

20.

Si on inscrit dans un segment compris entre une droite et une parabole un triangle ayant même base que le segment et même hauteur, le triangle inscrit sera supérieur à la moitié du segment.

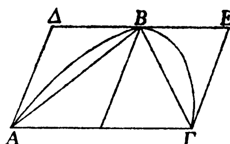


Fig. 78

Soit ΑΒΓ un tel segment ; inscrivons-y le triangle ΑΒΓ ayant la même base que le segment entier et la même hauteur. Du moment donc que le triangle a même base et même hauteur que le segment, le point Β est nécessairement[3] le sommet du segment ; ΑΓ est donc parallèle à la tangente[4] à la conique au point Β. Faisons passer

1. Cf. prop. 3.
2. Puisque ΑΔ = 2ΖΘ.
3. Cf. prop. 17, déf. de la fin.
4. Cf. prop. 1 ; 17 ; 18.

Ἔστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν ΒΔ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ, ἁ δὲ ΕΖ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΔ, ἄχθω δὲ καὶ ἁ ΖΘ παρὰ ΑΓ. Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται, καὶ αἱ ΑΔ, ΖΘ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσάν ἐντι, δῆλον ὡς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει, ὃν ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΖΘ δυνάμει· τετραπλασία ἄρα ἐστὶν καὶ ἁ ΒΔ τᾶς ΒΘ μάκει. Φανερὸν οὖν ὅτι ἐπίτριτός ἐστιν ἁ ΒΔ τᾶς ΕΖ μάκει.

κ′.

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μεῖζον ἐσσεῖται τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον ἢ ἥμισυ τοῦ τμάματος.

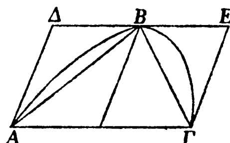


Fig. 78

Ἔστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμάματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγκαῖον τὸ Β σαμεῖον κορυφὰν εἶμεν τοῦ τμάματος· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἁ ΑΓ τᾷ κατὰ τὸ Β ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς.

6 κατὰ τὸ Β mss. DEGH : om. 𝔄 ‖ ἐντι 𝔄 : αἱ μέν τι DEGH ‖ 7 τὸν αὐτὸν G : τὰν αὐτὰν 𝔄 DEH ‖ ἔχει 𝔄 : ἔχοντι DEGH.

par B la parallèle ΔΕ à ΑΓ, et par Α et Γ les parallèles ΑΔ et ΓΕ au diamètre ; ces droites tomberont donc en dehors du segment[1]. Dès lors, comme le triangle ΑΒΓ est la moitié[2] du parallélogramme ΑΔΕΓ, il est évident qu'il est supérieur à la moitié du segment.

Corollaire

Ceci démontré, il est évident qu'il est possible d'inscrire dans ce segment un polygone tel que les segments restants soient inférieurs à toute aire donnée ; car en retranchant toujours une aire qui, en vertu de cette proposition, est supérieure à la moitié (sc. du segment), il est évident qu'en continuant ainsi à diminuer les segments restants (sc. il arrivera un moment où) nous les rendrons inférieurs à toute aire donnée[3].

21.

Si on inscrit dans un segment compris entre une droite et une parabole un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et si on inscrit dans les segments restants d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans le segment entier sera octuple de chacun des deux triangles inscrits dans les segments qui restent.

Soit ΑΒΓ un segment tel que nous venons de l'indiquer ; que le segment de droite ΑΓ soit divisé en deux parties égales par le point Δ ; que la droite ΒΔ soit menée parallèlement au diamètre ; le point Β est ainsi le sommet du segment[4], et le triangle ΑΒΓ

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.* 16.
2. Cf. Eucl. I, 41.
3. Cf. Eucl. X, 1.
4. Cf. prop. 18.

Ἄχθω ἁ ΔΕ διὰ τοῦ Β παρὰ τὰν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῶν Α, Γ αἱ ΑΔ, ΓΕ παρὰ τὰν διάμετρον · πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. Ἐπεὶ οὖν ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΔΕΓ παραλληλογράμμου, φανερὸν ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμάματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δεδειγμένου δὲ τούτου δῆλον ὅτι ὡς ἐς τοῦτο τὸ τμᾶμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμάματα παντὸς ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου · ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μείζονος τοῦ ἡμίσεος διὰ τοῦτο φανερὸν ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμάματα ποιήσομες ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κα′.

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ λειπόμενα τμάματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμᾶμα ἐγγραφέν.

Ἔστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ τετμάσθω ἁ ΑΓ δίχα τῷ Δ, ἁ δὲ ΒΔ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον · τὸ Β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστιν τοῦ τμάματος. Τὸ ἄρα ΑΒΓ

1 ΔΕ mss. DEGH : ze ms. 𝔏 ‖ τῶν Basil. : τᾶν DEGH ‖ 2 ΑΔ mss. DEGH : az ms. 𝔏 ‖ 4 ΑΔΕΓ mss. DEGH : azeg ms. 𝔏 ‖ 7 δεδειγμένου δὲ τούτου 𝔏 : δεδειγμένου DEH τούτου δεδειγμένου G ‖ 8-9 περιλειπόμενα G𝔏 : περιπόμενα D περιεπόμενα EH.

Fig. 79

a même base et même hauteur que le segment. Divisons de nouveau AΔ en deux parties égales par le point E et menons la parallèle EZ au diamètre ; soit Θ le point d'intersection de AB (sc. et de EZ). Le point Z est donc le sommet[1] du segment AZB, et par conséquent le triangle AZB a même base et même hauteur que le segment AZB. Il faut démontrer que le triangle ABΓ est équivalent à l'octuple du triangle AZB.

Le segment de droite BΔ est donc égal[2] aux quatre tiers de EZ et au double de EΘ. Le segment EΘ est donc égal au double de ΘZ, de façon que le triangle AEB est aussi double du triangle ZBA ; car le triangle AEΘ est double du triangle AΘZ, et le triangle ΘBE est double[3] du triangle ZΘB. Par conséquent, le triangle ABΓ est égal à l'octuple du triangle AZB ; on démontrera de la même manière qu'il est octuple aussi du triangle inscrit dans le segment BHΓ.

22.

Étant donné un segment compris entre une droite et une parabole, si des aires en nombre quelconque sont disposées en une suite de raison (sc. géométrique) quatre, la plus grande de ces aires étant équivalente au triangle qui a même base et même hauteur que le segment, la somme de toutes ces aires sera inférieure à l'aire du segment.

1. Cf. Eucl. I, 30 ; VI, 2 ; et prop. 18.
2. Cf. prop. 19.
3. Cf. Eucl. VI, 1.

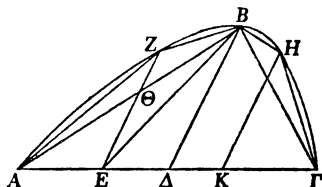


Fig. 79

τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Πάλιν τετμάσθω δίχα ἁ ΑΔ τῷ Ε, καὶ ἄχθω ἁ ΕΖ παρὰ τὰν διάμετρον, τετμάσθω δὲ ἁ ΑΒ κατὰ τὸ Θ· τὸ ἄρα Ζ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος τοῦ ΑΖΒ. Τὸ δὴ ΑΖΒ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ [ΑΖΒ] τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΖΒ τριγώνου.

Ἔστιν οὖν ἁ ΒΔ τᾶς μὲν ΕΖ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ ΕΘ διπλασία· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΕΘ τᾶς ΘΖ. Ὥστε καὶ τὸ ΑΕΒ τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΒΑ· τὸ μὲν γὰρ ΑΕΘ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΘΖ, τὸ δὲ ΘΒΕ τοῦ ΖΘΒ. Ὥστε τὸ ΑΒΓ τοῦ ΑΖΒ ἐστὶν ὀκταπλάσιον. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ ΒΗΓ τμᾶμα ἐγγραφέντος.

κβ′.

Εἴ κα ᾖ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἑξῆς ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος.

3 Θ mss. DEGH : t in duo equa 𝔛 ‖ 5 τῷ GH : τὸ DE ‖ ΑΖΒ alt. mss. DEGH om. 𝔛 del. Heiberg ‖ 13 τμᾶμα Heiberg : τμῆμα G𝔛 τμήματος DEH.

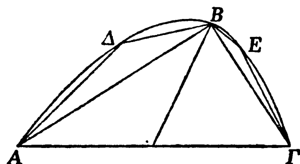


Fig. 80

Soit, en effet, le segment ΑΔΒΕΓ compris entre une droite et une parabole ; soit les aires Z, H, Θ, I, en nombre quelconque, disposées en une suite de manière que celle qui précède soit quadruple de celle qui suit ; que l'aire la plus grande soit Z, et que Z soit équivalent au triangle ayant même base et même hauteur que le segment. Je dis que le segment est supérieur à la somme des aires Z, H, Θ, I.

Soit B le sommet du segment entier, Δ et E les sommets des segments restants. Puisque le triangle ΑΒΓ est équivalent à l'octuple[1] de chacun des triangles ΑΔΒ et ΒΕΓ, il est évident qu'il est équivalent au quadruple de la somme de ces deux triangles. Puisque, de plus, le triangle ΑΒΓ est équivalent à l'aire Z, de leur côté les triangles ΑΔΒ et ΒΕΓ sont équivalents, pour les mêmes raisons, à l'aire H. On

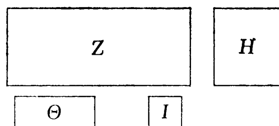


Fig. 81

démontrera de la même manière que les triangles inscrits dans les segments restants et qui ont même base et même hauteur que les segments sont équivalents à

1. Cf. prop. 21.

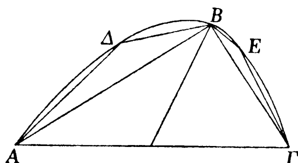


Fig. 80

Ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ ΑΔΒΕΓ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ Ζ, Η, Θ, Ι, τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ἀγούμενον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἔστω τὸ Ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω ὅτι τὸ τμᾶμα τῶν Ζ, Η, Θ, Ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν.

Ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κορυφὰ τὸ Β, τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ Δ, Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, δῆλον ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Ζ χωρίῳ, κατὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ

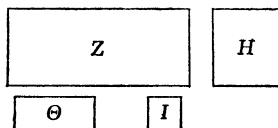


Fig. 81

Η χωρίῳ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἴσα ἐντὶ

11 ὅτι ὡς DEG : ὡς H quod 𝔛 ‖ 13 ταῦτα δὴ Heiberg : τὰ αὐτὰ δὲ codd. ‖ 16 ἴσα ἐντὶ G𝔛 : ἴσων ὄντων DEH.

l'aire Θ, et que les triangles inscrits (sc. de la même façon) dans les segments apparaissant à la suite (sc. de cette opération) sont équivalents à l'aire I. Il s'ensuit que la somme des aires proposées sera équivalente à un polygone inscrit dans le segment. Il est donc manifeste que cette somme est inférieure à l'aire du segment.

23.

Si des grandeurs sont disposées en une suite de raison quatre[1], la somme de ces grandeurs augmentée du tiers de la plus petite sera égale aux quatre tiers de la plus grande[2].



Fig. 82

Soit A, B, Γ, Δ, E des grandeurs en nombre quelconque, disposées en une suite (sc. décroissante), chacune étant le quadruple de la suivante. Soit A la plus grande, Z le tiers de B, H le tiers de Γ, Θ le tiers de Δ, I le tiers de E. Du moment que Z est le tiers de B, et que B est le quart de A, la somme de B et de Z est égale à la troisième partie de A. Pour les mêmes raisons, la somme de H et de Γ est égale à la troisième partie de B, la somme de Θ et de Δ égale à la troisième partie de Γ la somme de I et de E égale à la troisième partie de Δ. Il s'ensuit que la somme de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I est égale à la troisième partie de la somme de A, B, Γ, Δ. Mais la somme de Z, H, Θ

1-2. Cf. notes compl.

τῷ Θ καὶ τὰ ἐς τὰ ὕστερον γενόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ Ι χωρίῳ· σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμᾶμα. Φανερὸν οὖν ὅτι ἐλάσσονά ἐστι τοῦ τμάματος.

κγ'.

Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου.



Fig. 82

Ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε τετραπλασίονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Α, ἔστω δὲ τὸ μὲν Ζ τρίτον τοῦ Β, τὸ δὲ Η τοῦ Γ, τὸ δὲ Θ τοῦ Δ, τὸ δὲ Ι τοῦ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ζ τοῦ Β τρίτον μέρος ἐστίν, τὸ δὲ Β τοῦ Α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ Β, Ζ μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ Α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ Η, Γ τοῦ Β καὶ τὰ Θ, Δ τοῦ Γ καὶ τὰ Ι, Ε τοῦ Δ· καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν Α, Β, Γ, Δ. Ἐντὶ δὲ καὶ

1 τὰ ἐς Heiberg : ἐς DEGH ‖ 2 I mss. GB : Ϙω̅ι̅ DEH ‖ 4 ἐλάσσονά 𝔏 : ἔλασσον DEGH ‖ 6 τεθέωντι Heiberg : συντεθέωντι codd. ‖ 11 τετραπλασίονα DEGH : τετραπλάσιον 𝔏 ‖ 17 H, Θ, I mss. G𝔏 : E, Θ, Γ mss. DEH ‖ 18 Δ Torellius : Δ, E codd.

est aussi égale à la troisième partie de la somme de B, Γ, Δ ; par conséquent, la somme de B, Γ, Δ, E, I qui reste (sc. si on retranche de la somme, entière, de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I la somme, partielle, de Z, H, Θ) est égale à la troisième partie de la grandeur A qui reste (sc. si on retranche du tiers de la somme de A, B, Γ, Δ le tiers de la somme de B, Γ, Δ). Il est donc évident que la somme de A, B, Γ, Δ, E, augmentée de I, c'est-à-dire du tiers de E, est égale aux quatre tiers de A.

24.

Tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment.

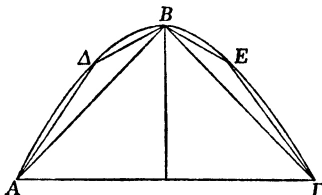


Fig. 83

Soit le segment AΔBEΓ compris entre une droite et une parabole, et le triangle ABΓ ayant même base et même hauteur que ce segment. Soit K une aire équivalente aux quatre tiers du triangle ABΓ. Il faut démontrer que K est équivalent au segment AΔBEΓ.

Si K n'est pas équivalent au segment, K est ou bien supérieur ou bien inférieur à ce segment. Que le segment AΔBEΓ soit d'abord, si possible, supérieur à l'aire K. Or nous avons inscrit (sc. dans le segment) les triangles AΔB et BEΓ comme cela a été indiqué, et nous avons aussi inscrit, dans les segments restants, d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, et nous continuons à inscrire dans les segments apparaissant successivement des triangles ayant même base et même hauteur que ces segments. Les

αὐτὰ τὰ Ζ, Η, Θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν Β, Γ, Δ· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ Α. Δῆλον οὖν ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ τὸ Ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ Ε, τοῦ Α ἐστὶν ἐπίτριτα.

κδ'.

Πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

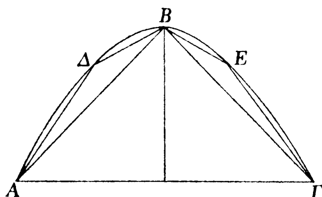


Fig. 83

Ἔστω γὰρ τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον ἔστω τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ Κ χωρίον. Δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔΒΕΓ τμάματι.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου. Ἐνέγραψα δὴ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα, ὡς εἴρηται, ἐνέγραψα δὲ καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἄλλα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμάματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐσσοῦνται δὴ τὰ κατα-

13 τῷ EG : τὸ DH.

segments restants finiront, dès lors, par être inférieurs[1] à l'excès du segment ΑΔΒΕΓ sur l'aire K. Il s'ensuit que le polygone inscrit sera supérieur à l'aire K, ce qui est impossible. Nous avons, en effet, ici des aires disposées en une suite de raison quatre, d'abord le triangle ΑΒΓ, quadruple[2] de la somme des triangles ΑΔΒ et ΒΕΓ, ces derniers quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi de suite. Il est donc évident que la somme de toutes ces aires est inférieure aux quatre tiers de la plus grande[3] ; mais (sc. par hypothèse) l'aire K est équivalente aux quatre tiers de la plus grande aire (sc. du triangle ΑΒΓ). Le segment ΑΔΒΕΓ n'est donc pas supérieur à l'aire K.

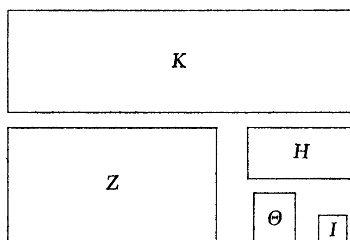


Fig. 84

Qu'il soit, si possible, inférieur à K. Donnons-nous dès lors une aire Z équivalente au triangle ΑΒΓ, une aire H équivalente au quart de Z, une aire Θ équivalente au quart de H, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la dernière aire soit devenue inférieure à l'excès de l'aire K sur le segment[4]. Soit I cette plus petite aire. La somme des aires Z, H, Θ, I, augmentée du tiers de l'aire I, est donc équivalente aux quatre tiers de l'aire Z. Mais l'aire K est elle aussi équivalente aux quatre tiers de Z. L'aire K est donc équivalente à

1. Cf. prop. 20, coroll.
2. Cf. prop. 21.
3. Cf. prop. 23.
4. Cf. Eucl. X, 1.

λειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου. Ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ Κ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, πρῶτον μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων καὶ ἀεὶ οὕτω, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ Κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. Οὐκ ἄρα ἐστὶν μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου.

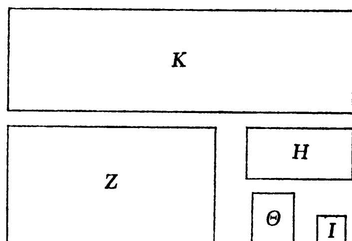


Fig. 84

Ἔστω δέ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Κείσθω δὴ τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ Ζ, τοῦ δὲ Ζ τέταρτον τὸ Η, καὶ ὁμοίως τοῦ Η τὸ Θ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω, ἕως κα γένηται τὸ ἔσχατον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Κ χωρίον τοῦ τμάματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ Ι· ἔστιν δὴ τὰ Ζ, Η, Θ, Ι χωρία καὶ τὸ τρίτον τοῦ Ι ἐπίτριτα τοῦ Ζ. Ἔστιν δὲ καὶ τὸ Κ τοῦ Ζ ἐπίτριτον· ἴσον ἄρα τὸ Κ τοῖς Ζ, Η, Θ, Ι καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ Ι. Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ χωρίον

4 γάρ add. Heiberg ‖ 5 τρίγωνον DEGH : om. 𝓛 ‖ 6 δὲ DEGH : om. 𝓛 ‖ αὐτὰ ταῦτα Heiberg : τὰ αὐτὰ DEGH ipsa 𝓛 ‖ 13 ἕως κα γένηται Heiberg : ὥστε καταγένηται DEGH ut fiat 𝓛 ‖ 16 δὴ Heiberg : δὲ codd.

la somme des aires Z, H, Θ, I augmentée du tiers de l'aire I. Du moment donc que l'aire K dépasse la somme des aires Z, H, Θ, I d'une aire inférieure à I, et qu'elle dépasse le segment d'une aire supérieure à I, il est évident que la somme des aires Z, H, Θ, I est supérieure au segment, ce qui est impossible ; car il a été démontré que, si dans une suite d'aires, en nombre quelconque et de raison quatre, la plus grande est équivalente au triangle inscrit dans le segment, la somme de toutes ces aires est inférieure au segment[1]. Il s'ensuit que le segment ΑΔΒΕΓ n'est pas inférieur à l'aire K. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas non plus supérieur. Il est donc équivalent à l'aire K. Mais l'aire K est équivalente aux quatre tiers du triangle ΑΒΓ. Par conséquent, le segment ΑΔΒΕΓ est lui aussi équivalent aux quatre tiers du triangle ΑΒΓ.

1. Cf. prop. 22.

τῶν μὲν Ζ, Η, Θ, Ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ Ι, τοῦ δὲ τμάματος μείζονι τοῦ Ι, δῆλον ὡς μείζονά ἐντι τὰ Ζ, Η, Θ, Ι χωρία τοῦ τμάματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ὅτι, ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμᾶμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος. Οὐκ ἄρα τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Κ χωρίου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ Κ. Τὸ δὲ Κ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ· καὶ τὸ ΑΔΒΕΓ ἄρα τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

1 τῶν GH : τῷ DE ‖ 4 ἐὰν DEGH : om. 𝔏 ‖ 10 ἄρα 𝔏 : om. DEGH.

NOTES COMPLÉMENTAIRES

Page 9.

3. Cf. *ibid.*, II, 1.
4. Cf. *ibid.*, II, 4.
5. Cf. *ibid.*, II, 3.
6. Cf. *ibid.*, II, 5.
7. Cf. *ibid.*, II, 6.
8. Cf. *ibid.*, II, 7.

Page 13.

1. Il s'agit donc de l'aire d'un triangle mixtiligne limité par un arc de cercle, un arc de spirale et un segment de droite ; cf. la figure de la prop. 28.
2. Cf. prop. 28.
3. Le « postulat d'Archimède » qui suit est énoncé dans le traité *De la sphère et du cylindre*, I, post. 5 et dans la lettre à Dosithée qui introduit *La quadrature de la parabole.*

Page 23.

1. Cf. p. 17, n. 2.
2. Cf. Eucl. III, 35.
3. Cf. Eucl. VI, 4 et V, 18.

Page 25.

2. En d'autres termes :
$\Theta\ (A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta) = \Theta\ (A+3B+5\Gamma+7\Delta+9E + 11Z+13H+15\Theta)$.
3. C'est-à-dire :
$A^2 = \Theta\,[A + (B+I) + (\Gamma+K) + (\Delta+\Lambda) + (E+M) + (Z+N) + (H+\Xi)+(\Theta+O)] = \Theta \cdot 8A = \frac{A}{8} \cdot 8A$.

Page 26.

1. A savoir : $A^2+\Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)$.

2. On a d'après la proposition 10

$$A^2 > \Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta),$$

d'où

$$2\,A^2 > A^2+\Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)\,;$$

« ce qui est ajouté », à savoir $A^2+\Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)$, est donc inférieur à $2A^2$. En remplaçant donc dans la relation de plus haut

(1) $S_1+A^2+\Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta) = 3\,S_2,$

où S_1 et S_2 désignent la première et la seconde somme, $A^2+\Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)$ par $2A^2$, cette relation devient

(2) $S_1+2A^2 > 3\,S_2,$ d'où

$$S_1 > 3\,S_2 - 2A^2 > 3\,S_2 - 3A^2 = 3\,(S_2 - A^2).$$

Page 29.

1. De la suite d'égalités

$$\frac{\overline{AB}^2}{AB\cdot\Phi B+\frac{1}{3}\,\overline{A\Phi}^2} = \frac{\overline{O\Delta}^2}{O\Delta\cdot\Delta X+\frac{1}{3}\,\overline{XO}^2} = \frac{\overline{\Pi Z}^2}{\Pi Z\cdot\Psi Z+\frac{1}{3}\,\overline{\Psi\Pi}^2} = \ldots,$$

Archimède déduit, avec l'hypothèse sous-entendue $\Delta X = \Psi Z = \Omega\Theta = \text{K}ϡ = \text{M}ϛ = N\Xi$, et l'hypothèse explicite $O\Delta = OX+X\Delta$, $\Pi Z = \Pi\Psi+\Psi Z$, etc., la relation

$$\frac{\overline{O\Delta}^2+\overline{\Pi Z}^2+\overline{P\Theta}^2+\overline{\Sigma K}^2+\overline{TM}^2+\overline{\Upsilon\Xi}^2}{N\Xi\,(O\Delta+\Pi Z+P\Theta+\Sigma K+TM+\Upsilon\Xi)+\frac{1}{3}\,(\overline{OX}^2+\overline{\Pi\Psi}^2+\overline{P\Omega}^2+\overline{\Sigmaϡ}^2+\overline{Tϛ}^2+\overline{\Upsilon N}^2)} = \frac{\overline{AB}^2}{AB\cdot\Phi B+\frac{1}{3}\,\overline{\Phi A}^2}$$

Page 38.

1. C'est-à-dire supérieur à l'angle compris entre la droite $A\Delta$ et l'arc ΔTP qui, lui, est supérieur à tout angle aigu rectiligne, cf. Eucl. III, 16 ; d'autre part, cet angle étant contenu dans l'angle $A\Delta Z$, ce dernier angle ne saurait être aigu.

Page 42.

3. Cf. Eucl. III, 7.

4. Puisque, par hypothèse, $A\Lambda < AZ$, on a : $\frac{\Theta A}{A\Lambda} > \frac{\Theta A}{AZ}$, d'où l'on déduit : $\frac{\Theta A}{A\Lambda} > \frac{\frac{1}{2}\,\Theta H}{\text{perp. de A sur }\Theta H}$.

5. Cf. prop. 7.

6. On a en effet : $\frac{NP}{\Theta A} = \frac{\Theta P}{A\Lambda}$, cf. Eucl. V, 16, et $\Theta A = PA$.

7. Cf. prop. 15.

Page 43.

1. Cf. prop. 4.
2. Cf. Eucl. III, 16, coroll.
3. Cf. prop. 8.
4. Cf. Eucl. V, 16.

Page 47.

1. Puisque l'angle $A\Delta Z$ est aigu ; cf. prop. 16.
2. Cf. prop. 4.
3. Cf. prop. 7.
4. Puisque $\Delta A = AP$; cf. Eucl. V, 16.

Page 62.

4. Cf. prop. 11, coroll.
5. Cf. milieu de cette prop. 25.
6. Cf. Eucl. V, 10.

Page 69.

3. Cf. prop. 24.
4. Cf. 25, coroll.
5. Cf. Eucl. XII, 2.
6. Cf. Eucl. V, 22.
7. Du moment que $\Gamma\Theta = 3\,\Theta A$, $\Theta B = 2\,\Theta A$, $\Gamma B = AB = \Theta A$,

on a : $$\frac{\Gamma\Theta\cdot\Theta B + \frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2}{B\Theta\cdot\Theta A + \frac{1}{3}\overline{AB}^2} = \frac{6\,\overline{\Theta A}^2 + \frac{1}{3}\overline{\Theta A}^2}{2\,\overline{\Theta A}^2 + \frac{1}{3}\overline{\Theta A}^2} = \frac{19\,\overline{\Theta A}^2}{7\,\overline{\Theta A}^2} = \frac{19}{7}.$$

8. Cf. Eucl. V, 17.
9. Cf. Eucl. V, 22.

Page 71.

1. Du moment que
$$\frac{N}{K+\Lambda+M} = \frac{\Theta\Gamma\cdot B\Delta}{\Gamma\Theta\cdot\Theta B + \frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2},$$ on aura
$$\frac{K+\Lambda+M}{N} = \frac{\Gamma\Theta\cdot\Theta B + \frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2}{\Theta\Gamma\cdot B\Delta}$$
et $$\frac{K+\Lambda+M+N}{N} = \frac{\Gamma\Theta\cdot\Theta B + \frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2 + \Theta\Gamma\cdot B\Delta}{\Theta\Gamma\cdot B\Delta}$$

et $\frac{N}{K+\Lambda+M+N} = \frac{\Theta\Gamma \cdot B\Delta}{\Gamma\Theta \cdot \Theta B + \frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2 + \Theta\Gamma \cdot B\Delta}$;

cf. Eucl. V, 7, coroll. et V, 18. Les mots « et inversement » sont l'addition superflue d'un copiste.

2. Cf. Eucl. V, 7, coroll.

3. Cf. Eucl. V, 22.

4. Bien qu'elle soit vraie pour toute spirale, Archimède ne démontre cette proposition que pour la spirale décrite dans une seule révolution. Heiberg pense, pour cette raison, que le mot ὁποιᾳοῦν n'est pas d'Archimède lui-même ; cf. *Archimedis Opera*, II, p. 117.

Page 73.

2. On a, d'après Eucl. V, 7, coroll., $\frac{H\Gamma\Theta}{N+\Pi} = \frac{\overline{H\Theta}^2}{H\Theta \cdot A\Theta + \frac{1}{3}\overline{AH}^2}$;

de cette relation on déduit, d'après Eucl. V, 17, la relation

$\frac{\Xi}{N+\Pi} = \frac{\overline{H\Theta}^2 - (H\Theta . A\Theta + \frac{1}{3}\overline{AH}^2)}{H\Theta \cdot A\Theta + \frac{1}{3}\overline{AH}^2}$; mais d'après Eucl. II, 4,

$\overline{H\Theta}^2 - (H\Theta \cdot A\Theta + \frac{1}{3}\overline{AH}^2) = \overline{HA}^2 + \overline{A\Theta}^2 + 2\, HA \cdot A\Theta - HA \cdot A\Theta$
$- \overline{A\Theta}^2 - \frac{1}{3}\overline{AH}^2 = HA \cdot A\Theta + \frac{2}{3}\overline{HA}^2$.

Page 81.

1. Cf. *De la sph. et du cyl.*, I, déf. 2.
2. Cf. post. 3.
3. Sc. de l'absurdité qui précède.
4. Cf. post. 1.
5. Cf. post. 2.

Page 89.

2. Il manque ici plusieurs chaînons dans le raisonnement, à savoir : « mais, par hypothèse, le point Γ marque déjà dans le segment EZ une division telle que les segments partiels aient entre eux le rapport inverse de celui des grandeurs ; il ne saurait donc marquer la même division aussi dans le segment EΘ. » Pour combler la lacune, dont on ignore l'origine, Heiberg propose d'insérer, entre μεγέθεσιν · et ὥστε, la phrase : τὸ δὲ Γ ἐπὶ τᾶς EZ ἐστὶ τμαθείσας, ὥστε τὰ τμάματα ἀντιπεπονθέμεν τοῖς μεγέθεσιν.

Page 90.

1. Cf. post. 4.
2. Cf. prop. 5, coroll. 2.
3. Puisque EK est inférieur à IΘ, par hypothèse.

Page 92.

2. Cf. prop. 4.
3. Cette définition est rejetée, comme addition d'un copiste, par Barrowius et par Heiberg.
4. Conditions de similitude des triangles ΑΒΓ et ΔΕΖ ; cf. Eucl. VI, 4.

Page 94.

5. Cf. Eucl. V, 17 et 22.
6. Sc. après soustraction de l'angle ΒΑΘ de l'angle ΒΑΗ, et de l'angle ΕΔΝ de l'angle ΕΔΜ ; cf. Eucl. I, Not. comm. 3.
7. Sc. après soustraction de la somme des angles ΑΒΘ, ΒΓΘ, ΘΓΗ, ΗΑΘ, ΘΑΒ de la somme des angles du triangle ΑΒΓ, et soustraction de la somme des angles ΔΕΝ, ΕΖΝ, ΝΖΜ, ΜΔΝ, ΝΔΕ de la somme des angles du triangle ΔΕΖ.

Page 97.

1. Les quatre mots du texte τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος sont condamnés par Heiberg comme une interpolation tirée du commentaire d'Eutocius ; cf. Heiberg, *Archim. Opera,* II, p. 155.
2. Puisque $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{Z\Gamma}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\Gamma} = 2$; cf. Eucl. VI, 2.
3. Λ est le point homologue de Θ d'après la prop. 11.
4. Cf. Eucl. I, 29.

Page 98.

3. Du moment que $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{AZ}}$, on a $\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda\Theta} = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{K}\Theta}$; cf. Eucl. VI, 2.
4. Cf. prop. 10.
5. Les droites ΜΝ, ΖΛ et ΑΘ sont en effet parallèles, puisque ΕΜ = ΜΖ et ΚΝ = ΝΛ.
6. Cf. *La Quadr. de la parab.*, prop. 6.

Page 100.

1. Cf. prop. 13.
2. Cf. prop. 8.
3. Cf. prop. 14.

4. Cf. prop. 6 et 7.
5. Cf. Eucl. VI, 1.
6. A cause de la similitude des triangles OPΠ et ΣΠΞ ; cf. Eucl. VI, 4.
7. On a en effet : EP = PΣ = ΣZ, puisque AN = NΛ = BA, et que les droites NT, ΛM et BΓ sont parallèles.
8. Il faut compléter la démonstration par la conclusion : $\frac{2\,\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{A\Delta}}{2\,\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma}}$ est donc égal à $\frac{\Pi\mathrm{E}}{\Pi\mathrm{Z}}$.

Page 102.

1. En faisant l'addition des deux égalités EΘ = ZK et EΛ = ZΘ,

$$\begin{array}{r} \mathrm{E\Theta = ZK} \\ \underline{\mathrm{E\Lambda = Z\Theta}} \\ \mathrm{\Lambda\Theta = K\Theta} \end{array}$$

on trouve en effet ΛΘ = KΘ
2. Cf. Eucl. V, 15.

Page 105.

1. Comme les segments BN, NM, MΛ, ΛΔ, d'une part, Oϛ, ϛϡ, ϡΩ, ΩP, d'autre part, sont dans le rapport des nombres impairs 1, 3, 5, 7, les segments BN, BM, BΛ, BΔ, d'une part, Oϛ, Oϡ, OΩ, OP, d'autre part, sont dans le rapport des nombres carrés 1, 4, 9, 16. Mais, en vertu d'une propriété de la parabole (cf. *Quadr. parab.* 3), les carrés sur les segments HN, ZM, EΛ, AΔ sont entre eux comme les segments BN, BM, BΛ, BΔ, et les carrés sur les segments Xϛ, Yϡ, ΣΩ, ΞP sont entre eux comme les segments Oϛ, Oϡ, OΩ, OP. Les rapports des segments BN, BM, BΛ, BΔ étant égaux aux rapports des segments Oϛ, Oϡ, OΩ, OP, les rapports des carrés sur HN, ZM, EΛ, AΔ sont égaux aux rapports des carrés sur Xϛ, Yϡ, ΣΩ, ΞP, d'où l'on déduit l'égalité des rapports de 2HN, 2ZM, etc. et des rapports de 2Xϛ, 2Yϡ, etc., c'est-à-dire des rapports de HΘ, ZI, EK, AΓ et des rapports de XΨ, YΦ, ΣT, ΞΠ.
2. Puisque, d'après I, 15, la place des centres de gravité dépend du rapport des côtés AI, EK, ΞΠ, ZT.
3. Cf. I, 14.

Page 111.

1. Puisque la figure AKBΛΓ est supérieure au triangle ABΓ et que la somme des segments restants est inférieure à l'aire X.
2. Cf. Eucl. V, 8.

Page 116.

1. En d'autres termes :

a, b, c, d étant quatre segments tels que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, si on se donne deux segments λ et μ tels que :

$$\frac{\lambda}{\frac{3}{5}(a-c)} = \frac{d}{a-d}\text{; et } \frac{\mu}{a-c} = \frac{2a+4b+6c+3d}{5a+10b+10c+5d},$$

on a : $\lambda + \mu = \frac{2}{5}a$.

Page 120.

4. Ce long raisonnement est fondé sur les propositions relatives aux grandeurs proportionnelles contenues dans Eucl. V et VI. L'écriture algébrique rend la démonstration plus aisée et plus brève. On trouvera des démonstrations concises dans Sturm, *op. laud.* p. 273, dans Nizze, *op. laud.*, p. 38, et, plus récemment, dans P. Ver Eecke, *op. laud*, t. I, p. 344. Heiberg, t. III, p. v, a traduit en langage algébrique la démonstration de ce théorème donnée par $\mathcal{L}$.

Page 142.

3. On a en effet : $\frac{\text{périmètre du pol. de 656 côtés}}{\Theta K} < \frac{44}{7}$, d'où

$\frac{\text{côté du polyg. de 656 c.}}{\Theta K} < \frac{44}{656.7} = \frac{44}{4592} = \frac{11}{1148}$; puisque AB < côté du polyg. de 656 côtés, $\frac{AB}{\Theta K} < \frac{11}{1148}$; $\frac{AB}{\Theta K} < \frac{1}{104 + \frac{4}{11}}$;

donc à plus forte raison $\frac{AB}{\Theta K} < \frac{1}{100}$; $AB < \frac{1}{100}\,\Theta K$.

Page 192.

1. Sur cette proposition cf. E. Stamatis, Γενίκευσις ἑνὸς θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους, Πλάτων, t. XV, 1963, fasc. 29 et 30, p. 165-168.

2. Cf. Eucl. IX, 35.

TABLE DES MATIÈRES